

4/50639

1168-86.

(6)

50639
BORSOD
MISKOLCI
MUZEUM

MATHEMATIKAI
ÉS
TERMÉSZETTUDOMÁNYI
ÉRTESÍTŐ.

A M. TUD. AKADEÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

SZERKESZTI

FRÖHLICH IZIDOR

OSZTÁLYTITKÁR.



XXXVII. KÖTET.

BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEÉMIA.

1920.

Kivonat a M. Tud. Akadémia III. osztályának ügyrendjéből.

62. §. A «Math. és Természettud. Értesítő» a M. Tud. Akadémia III. osztályának folyóirata, melyben az ülésein részletesen bemutatott vagy csak röviden bejelentett tudományos munkákat teszi közzé, feltéve, hogy a követelményeknek megfelelnek.

Az Értesítőben csak oly közlemények foglalhatnak helyet, melyek az illető szaktudomány művelésében az elért eredmények vagy a használt módszerek tekintetében haladást jeleznek és irodalmi szempontból is kellő gonddal készültek. Terjedelem tekintetében az Akadémia rövid és szabatos fogalmazást kíván, melyben a dolgozat tudományos tartalmának megértésére szükséges részletek kellően kidomborodnak.

Az egyes cikkek terjedelme három ívet meg nem haladhat; egyes rendkívüli esetekben csak az osztály adhatja meg az engedélyt nagyobb terjedelmű dolgozat közzétételére, mely azonban az öt ívet ekkor sem haladhatja túl.

A cikkekhez szükségelt ábrák rendszerint egyszerűek és a szöveg közé illesztendő; csak a hol a tárgy ezt okvetlenül megkívánja, adhatók külön mellékletet képező táblák.

Az Értesítőt az osztálytitkár szerkeszti, ki a megjejtett bírálat után a maga részéről is örködni tartozik a felett, hogy a közzétett dolgozatok a jelzett követelmények szempontjából kifogásolhatók ne legyenek. Abban az esetben, midőn a benyújtó tag az osztálytitkárral meg egyezésre jutni nem tud, joga van az ügyben az osztály határozatát kikérni.

Az Akadémia elvárja tagjaitól, hogy akkor is, mikor az Akadémián kívül álló szakférfiak dolgozatait mutatják be, már a bemutatás előtt meggyőződjenek arról, hogy a közzétételre ajánlott dolgozatok tartalomlag és alakilag a felsorolt követelményeket kielégítik-e? Arra, hogy valamely szerző tudományos dolgozata az Értesítőbe felvétessek, különben elég, ha a szerző azt az osztálytitkárnak beküldi, ki a dolgozat címét az osztály ülésén bejelenti és kedvező bírálat esetében az Értesítőbe fölveszi.

Minden közlemény legott a bemutatás után hibátlanul, tisztán és olvashatólag írva átadandó az osztálytitkárnak. Csak az osztály határozatából engedhető meg — fontos akadályok esetében — utólagos átvétel.

Az Értesítő évi öt füzetben jelenik meg; a füzetek megjelenési határideje február, április, június, október és december hónapoknak mindenkor utolsó napja.

A szerzők értekezéseik 25 különlenyomatát díjtalanul kapják. Az e számon felül kívánt különlenyomatok költségét szerzők fedezik.

50639

MATHEMATIKAI

ÉS

TERMÉSZETTUDOMÁNYI

ÉRTESÍTŐ.

A M. TUD. AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

SZERKESZTI

FRÖHLICH IZIDOR

OSZTÁLYTITKÁR.

XXXVII. KÖTET.

BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

1920.

BORSOD
MISKOLCI
MUZEUM

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

TARTALOM.

† BÁRÓ EÖTVÖS LORÁNT r. t. : Kísérleti kimutatása annak a nehézségi változásnak, amelyet valamely, a szabályos alakúnak felvett földfelületen keleti vagy nyugati irányban mozgó test e mozgás által szenved	1
RIESZ FRIGYES l. t. : Folytonos függvényoperációkról	29
MAURITZ BÉLA l. t. : Adulár a hazai andezitek érczteléreiben	37
ZIMÁNYI KÁROLY l. t. : Termésrész és kristályodott hematit Gömör vármegyéből	40
TANGL KÁROLY l. t. : Új módszer a szilárd anyag határán fellépő felületi feszültség vizsgálatára	43
MAURITZ BÉLA l. t. : A Báni-hegység bazaltszerű kőzetei	62
KONEK FRIGYES : Adatok a thiaceteczetæther, az α -chloraceteczetæther és az oxalsav ismeretéhez	66

KISÉRLETI KIMUTATÁSA

ANNAK A NEHÉZSÉGI VÁLTOZÁSNAK, A MELYET VALAMELY,
A SZABÁLYOS ALAKÚNAK FELVETT FÖLDFELÜLETEN KELETI
VAGY NYUGATI IRÁNYBAN MOZGÓ TEST E MOZGÁS ÁLTAL
SZENVED.

Báró EÖTVÖS LORÁNT † r. tagtól.¹

1. §. Bevezetés.

BORSOD
MISKOLCI
MŰZEUM

Ismert követelménye a GALILEI-NEWTON-féle mechanikának az, hogy valamely test súlyának *fogynia* kellene, ha a Földön *kelet* felé mozog, ellenben *növekednie*, ha *nyugat* felé mozog.

E nehézségi gyorsulás-változás nagysága, nyugvó nap-rendszerre vonatkoztatva:

$$\Delta g = -2Q \cos \varphi \frac{dy}{dt}, \quad (1)$$

¹ Ez értekezés világhírű szerzője súlyos betegségében, a melyben 1919 évi április hó 8.-án elhunyt, készítette el e közlemény német szövegét és azt 1919 évi március hó 31.-i keltezéssel el is küldette az «Annalen der Physik» című szakfolyóirat szerkesztőségének, a minek folytán az az 1919. év vége felé a nevezett folyóirat 59. kötete 743—752. lapjain meg is jelent; correcturáját ez Értesítő jelenlegi szerkesztője és FEKETE JENŐ úr, az elhunynak sok évi munkatársa végezték. Egyidejűleg a fenti keltezéssel a szerző e kézirati szöveg másolatát oly kéréssel bocsátotta a szerkesztő rendelkezésére, hogy magyarra fordítását és a 3. §-ában szükségesnek látszó elméleti kifejtéseket és kiegészítéseket végezze s ez Értesítőben leendő megjelenéséről gondoskodjék; ez FEKETE JENŐ úr szíves közreműködésével meg is történt.

A hazai kedvezőtlen közviszonyok, az Akadémia működésének ideiglenes kényszerszünetelése és nyomdai nehézségek miatt ez a magyar közlemény csak később jelenhetett meg, mint a német.

hol Ω a Föld forgásának szögsebessége, a mely

$$\Omega = \frac{2\pi}{86164.09 \text{ sec}} = 0.0000729212;$$

továbbá φ a Föld felületén lévő helynek földrajzi szélessége és $\frac{dy}{dt}$ a test sebessége a Földön, vonatkoztatva oly derékszögű koordináta-rendszerre, melynek X , Y , Z tengelyei rendre egybeesnek az Égnek Északi, Keleti és függőlegesen Lefelé haladó irányával.¹

¹ Ugyanis: 1. A forgó Földet első megközelítésben gömbalakúnak véve, a φ földrajzi szélességű valamely P pontjában a forgás folytán létesülő vonalmenti sebessége: $v_{\Omega} = \Omega R \cos \varphi$, hol Ω a Föld forgásának szögsebessége és R a Föld sugara, 1. ábra. A P

helyen levőnek felvett m tömegre ható, a forgás által ébresztett centrifugális erő nagysága:

$$m \cdot \frac{v_{\Omega}^2}{R \cos \varphi} = m \cdot \Omega^2 \cdot R \cos \varphi,$$

a mely az egyenlítő síkjához párhuzamos és \vec{QP} irányú; ennek a \vec{CP} mentén levő összetevője:

$$- m \cdot \Omega^2 \cdot R \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi,$$

a mely a Föld vonzása erejével ellentétben hat.

2. Ha az m -nek a Föld felületéhez képest $\frac{dy}{dt}$ sebességi összetevője is van, mely a mindenkori v_{Ω} forgási sebesség irányába esik, akkor ennek mechanikai hatása a centrifugális erőre vonatkozólag az, hogy ez erőnek kifejezésében a v_{Ω} helyébe a $(v_{\Omega} + \frac{dy}{dt})$

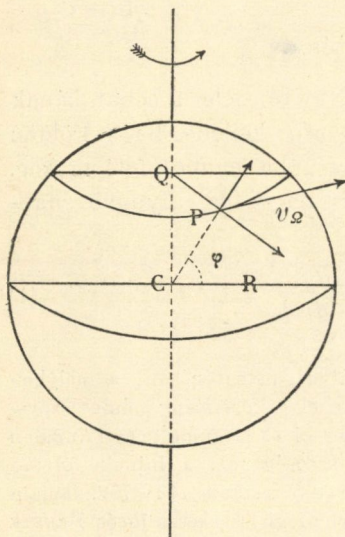
lép, hol $\frac{dy}{dt}$ sokszorta kisebb, mint v_{Ω} .

E szerint a középpontfutó erő nagysága:

$$m \left(v_{\Omega} + \frac{dy}{dt} \right)^2 \cdot \frac{1}{R \cos \varphi} = m \left(\Omega R \cos \varphi + \frac{dy}{dt} \right)^2 \cdot \frac{1}{R \cos \varphi}.$$

Megközelítésben:

$$m \Omega^2 \cdot R \cdot \cos \varphi + 2m \cdot \Omega \cdot \frac{dy}{dt};$$



1. ábra.

Azonban ennek a magában véve oly világos követelménynek egyenes kimutatása egy negyed-évszázaddal ezelőtt még nem sikerült. Ezt csak azoknak a mélyen átgondolt törekvéseknek köszönhetjük, a melyek még a nyílt tengeren jelentkező földnehézségi viszonyok felismerésére is vezettek. És csodálatosképpen, egy elkövetett hiba volt az, a mely a helyes útra vezetett. («Citius enim emergit veritas e falsitate, quam e confusione.» Baco.)

HECKER berlini tanárnak a nyílt tengeren végzett két emlékezetes utazása: az első az 1901. évben az Atlanti-tengeren, a második az 1904. évi márczius hó 23.-ától 1905. évi április hó 8.-áig az Indiai-tengeren, mindazoknak a szaktudósoknak az élénk érdeklődését felkeltették, a kik a Föld nehézségi ereje kérdésével foglalkoztak.¹

Így az én érdeklődésemet is.

De csakhamar észrevettem, hogy az eredmények számításánál a hajó mozgásának befolyása, a melynek az egyébként elért pontosság mellett, bizonyos, már előre kiszámítható értékekkel kellett volna jelentkeznie, ezeknek a feltevéseknek nem felelt meg.

Bármely kétely eloszlatása czéljából kíváncsúnak látszott a régebbi megfigyelési anyagnak újból való átvizsgálása és újból való átszámítása. Ámde HECKER tanár, a kihez azzal a kéréssel fordultam, hogy ily új számítást végeztessen, még többet is tett. Az ő minden nehézséget leküzdő tevékenységének sikerült az

a centrifugális erő összetevője a Föld vonzása \vec{PC} egyenese mentén:

$$-m\Omega^2 R \cdot \cos^2 \varphi - 2m\Omega \cos \varphi \cdot \frac{dy}{dt};$$

itt a második tag a keresett, a szövegben idézett (1) formula.

¹ 1. Bestimmung der Schwerkraft auf dem Atlantischen Ozean, sowie in Rio de Janeiro, Lissabon und Madrid. Von O. HECKER. Veröffentlichung des königlich preussischen geodätischen Institutes. Neue Folge Nr. 11, Folio. pp. 1—137, mit neun Tafeln. Berlin, 1903.

2. Bestimmung der Schwerkraft auf dem Indischen und Grossen Ozean und deren Küsten, sowie erdmagnetische Messungen. Von Prof. Dr. O. HECKER. Zentralbureau der internationalen Erdmessung. Neue Folge der Veröffentlichungen. Nr. 16. Folio. pp. 1—233, mit zwölf Tafeln. Berlin, 1908.

akkori orosz császári kormányt egy új expeditio felszerelésére indítani; és így az 1908. év május havában a Fekete-tengeren új utazásokat és azokon új méréseket végzett, és pedig a tenger felszínén részben ugyanazokon az utakon, de ellentett irányban hajózva.¹ Így az itt a kelet felé és a nyugat felé irányított hajósebességek különbsége közelítőlegesen 45 kilométert tett ki óránként; ² az (1) alatti képlet szerint a nehézség-különbségek közelítőlegesen

$$\Delta g = 0.707.0.000146 \cdot \frac{4500000}{3600} = 0.129, \quad (2)$$

értékűek, azaz oly nagyságú az ily változás, amely az alább megállapított módszerek alapján végzett legkezdetlegesebb kísérletekben is már felismerhető. Ily módon, azokból a látszólagos ellentmondásokból, a melyeket HECKER-nek a nyílt tengeren végzett megfigyelései kelteni látszottak, a régi elmélet első tényleges igazolását lehetett megállapítani.

2. §. A kísérleti kimutatásnak a lehetősége sokkal kisebb sebességeknél a laboratóriumban. A resonantia módszere.

Az (1) egyenlet mutatja, hogy a testnek kelet felé való mozgásakor minden grammtömegnek $1 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ sebességgel való haladása folytán 45 fok földrajzi szélesség alatt a gyorsulás változása $\Delta g = -0.000103$, azaz abszolút c. g. s.-rendszerben körülbelül egy tizedrészét teszi ki a gyorsulás c. g. s.-egységének; e szerint a *test súlya* körülbelül egy *tízmilliomod* részével változik.

E szerint előre látható, hogy ha valamely jól táplált, 100 kilogramm súlyú ember, mikor kényelmes, 1 méter másodpercenkénti sebességgel a szabályos alakúnak felvett Föld felületén kelet felé halad, körülbelül $2 \cdot \frac{100000.100}{10000} = 2000$ c. g. s., azaz köze-

¹ Bestimmung der Schwerkraft auf dem Schwarzen Meere und an dessen Küste, sowie neue Ausgleichung der Schwerkraft auf dem Atlantischen, Indischen und Grossen Ozean. Von Prof. Dr. O. HECKER. Zentralbureau der internationalen Erdmessung. Neue Folge der Veröffentlichungen. Nr. 20. Folio. pp. 1–160, mit vier Tafeln. Berlin, 1910.

² V. ö. e most idézett közlemény 103. lapjával.

litőlegesen két gramm súlylyal, röviden, egész test súlyának körülbelől két százzezred részével könnyebb, mint a mikor azután nyugat felé visszatér.

Ámde, az oly kísérletek, a melyek egyenletes, egyenes-vonalú mozgásokat tételeznek fel, alig valósíthatók meg pontosan; ezért folyamodunk ebben az esetben is a könnyebben és pontosabban létesíthető körmozgáshoz.

Forgassunk például valamely, végein megterhelt, lenghető mérlegrúd-alakú testet oly függőleges tengely körül, a mely a mérlegrúd nyugalmi helyzetében annak súlypontján halad át; míg a mérlegrúd lengése közben e súlypont a függélyes forgási tengely közelségében marad. A tömegek akkor szakaszosan keleti és azután nyugati irányban mozognak; és megfelelőleg az így keletkező nehézségi változásoknak: szakaszos lengéseknek kell fellépniök, a melyek sokszorosítás folytán szakadatlanul növekedve, a csillapító erő által korlátolt maximális határértéket érnek el. Ez a *kényszerített* lengések, a kényszerített rezgések egy esete, mint a melyhez analog rezgések a hangtani resonantia tanában előfordulnak, a melyeknek pontmozgásokra vonatkozó elméletét HELMHOLTZ elméleti physikájában oly mesterileg tárgyalja.¹

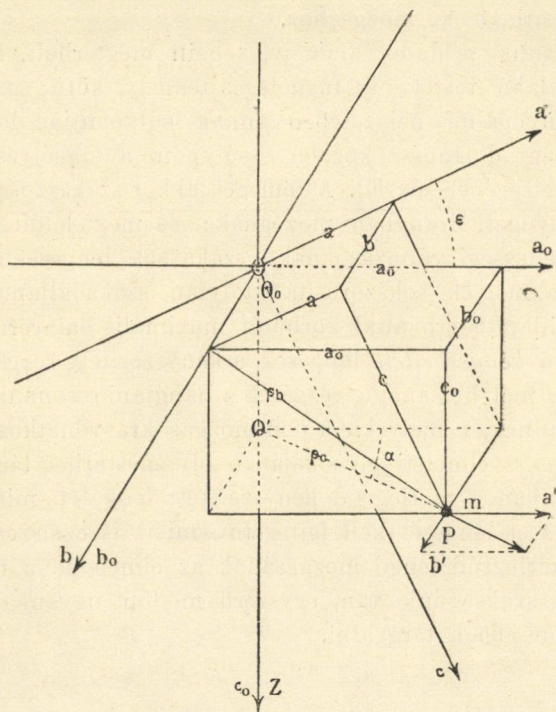
Itt azonban a mérlegrúd kényszerített lengését mint valamely egész test lengését kell fejtegetni, miért is czélszerűbbnek látszik, e mérlegrúd lengő mozgásának az elméletét, a mennyiben itt reá szükségünk van, egyszerű módon ugyan, de valamivel részletesebben tárgyalni.

3. §. A forgatott, impulsusoknak alávetett lengő mérlegrúd elmélete. A resonantia által elérhető maximális kilengések nagysága.

A következőkben oly lengő testre fogunk szorítkozni, a mely *egymásra merőleges három síkra nézve symmetrikus*, és a mely egyik, vízszintes tengelye körül (például *éleken*) szabadon lenghet.

¹ Vorlesungen über theoretische Physik. Band I., Abtheilung 2. Dynamik discrete Massen-Punkte. Herausgegeben von O. KRIGAR-MENZEL. Leipzig, J. A. Barth. 1898. pg. 95, pg. 119.

Legyenek (2. ábra) \overline{Oa} , \overline{Ob} , \overline{Oc} az e testtel mereven egybekapcsolt oly derékszögű koordináta-tengelyek, melyek közül Ob a mindig vízszintes lengési tengely legyen, míg a mérlegrúd egyensúlyi, nyugalmi helyzetében az (aOb) sík vízszintes-, de a pozitív c függőlegesen lefelé irányított legyen és ekkor ezek egybeessenek az (a_0Ob_0) -síkkal, illetőleg a c_0 -tengellyel.



2. ábra.

Legyenek továbbá X , Y , Z a világtérben lévő, a Föld-del mereven egybekapcsolt ama koordináta-tengelyek, melyek közül X észak felé, Y kelet felé, Z függőlegesen lefelé van irányítva; továbbá legyenek ρ_b és ρ_c azoknak a köröknek vagy köríveknek a sugarai, a melyeket a lengő testnek egy m tömegpontja a b , illetőleg a c_0 tengely körül leírhat.

Magára a lengő testre nézve az említett symmetria-síkok közül az egyik a (bOc) sík; a másik a (cOa) sík; e kettő egyszer-

smind a mérlegrúddal merev kapcsolatban lévő két koordináta-sík; a harmadik symmetria-sík *nem* az (aOb) koordináta-sík, hanem a vele párhuzamos, de az O_0 ponton áthaladó sík. Ez az O_0 pont a lengő mérlegrúd tömegközéppontja.

A mérlegrúd *éle* e szerint a *mindig vízszintes* \overline{Ob} tengelyben van, de ez az \overline{Ob} tengely, mint éppen említettük, nem halad pontosan ezen az O_0 tömegközépponton át, hanem e pont valamivel az *él alatt* fekszik, úgy, mint a közönséges mérlegnél. Ezért is a mérlegrúd nyugalmi helyzete egy *állandó* helyzet; és ha az egész eszköz nem forog \overline{OZ} függőleges tengelye körül, akkor a mérlegrúd úgy leng, mint egy közönséges fizikai inga.

Legyenek továbbá a 2. ábra szerint $\overline{Oa_0}$, $\overline{Ob_0}$, $\overline{Oc_0}$ valamely oly koordináta-rendszer derékszögű tengelyei, a mely rendszer az egész eszközzel, a mérlegrúd állványával, tartójával együtt az \overline{OZ} függőleges tengely körül forog, úgy, hogy $\overline{Oc_0}$ az \overline{OZ} -vel mindig egybeesik, míg $\overline{Ob_0}$ mindig az \overline{Ob} irányú él egyenesébe esik; az $\overline{Oa_0}$ szintén mindig a vízszintes síkban marad.

E megállapodás szerint az (a_0Ob_0) sík mindig vízszintes marad, míg a (b_0Oc_0) és a (c_0Oa_0) síkok mindig vertikálisak maradnak; a két, közös O kezdőpontú koordináta-rendszer egymáshoz való vonatkozását legegyszerűbben úgy ismerhetjük fel, ha megjegyezzük, hogy az $(a_0b_0c_0)$ rendszerből az (abc) rendszerre úgy térhetünk reá, ha az előbbi a közös $\overline{Ob} = \overline{Ob_0}$ tengely körül az ϵ szöggel elforgatjuk.

1. *Nem forgatott mérlegrúd. Egyszerűen harmonikus ingalengés.*

Ha a nem forgatott mérlegrúdra csillapító erő nem hat, akkor a földnehézségi erő által a lengő rúdra kifejtett forgató nyomaték közönséges kifejezése:

$$F_{(g)} = - M \cdot g \cdot s \cdot \sin \epsilon; \quad (3)$$

hol M az egész tömege a lengő mérlegrúdnak, g a földnehézségi erő gyorsulása a Föld felületén nyugvó testekre nézve, s e rúdtömeg középpontjának távolsága a forgás élettől, azaz, $\overline{OO_0} = s$, és ϵ a szög, a melyet ez az s a földnehézségi erő irányá-

val alkot. Akkor, K_b -val jelezve a lengő testnek az Ob élre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát, a mérlegrúd mozgás-egyenlete:

$$K_b \cdot \frac{d^2 \epsilon}{dt^2} = - M \cdot g \cdot s \cdot \sin \epsilon; \quad (4)$$

hol ez az $F_{(g)}$ forgató nyomaték *negatív*, mert az ϵ szöveget *kisebbiteni* törekszik.

Ha a lengés amplitúdója kicsiny: a kettős lengés időtartama, a T_0 , első megközelítésben írható:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{K}{M \cdot g \cdot s}}. \quad (5)$$

2. Nem forgatott mérlegrúd. Egyszerű harmonikus csillapított lengés.

Ha *csillapító erő* lép fel, akkor az ennek folytán hozzájáruló lassító forgató nyomaték mérsékelt szögsebességeknél írható:

$$F_{(k)} = - \Gamma \cdot \frac{d\epsilon}{dt}, \quad (6)$$

úgy hogy a még mindig *nem* forgatott mérlegrúd mozgás-egyenlete:

$$K_b \frac{d^2 \epsilon}{dt^2} = - Mgs \cdot \sin \epsilon - \Gamma \frac{d\epsilon}{dt},$$

avagy kicsiny lengéseknél első megközelítésben:

$$\frac{d^2 \epsilon}{dt^2} + k \frac{d\epsilon}{dt} + \omega_0^2 \epsilon = 0; \quad (7)$$

hol:

$$\begin{aligned} \frac{Mgs}{K_b} &= \omega_0^2; \\ \frac{\Gamma}{K_b} &= k. \end{aligned} \quad (7a)$$

Az egyenlet ismert megoldásának rendes alakja:

$$\epsilon = E \cdot e^{-\frac{1}{2}kt} \cdot \cos(t\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4}k^2} + 2\pi\delta), \quad (8)$$

melyben E és δ az integratio két állandója, míg most a kettős lengési idő, a T az

$$\omega_0^2 - \frac{1}{4}k^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 - \frac{1}{4}k^2$$

vonatkozásból:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4}k^2}}. \quad (9)$$

Az egymásra következő két legnagyobb szögkitérés hányadosa itt:

$$e^{+\frac{1}{4}kT} = \vartheta; \quad (10)$$

ez a közönséges csillapodási viszony, míg ennek természetes logaritmusa:

$$\frac{1}{4}kT = \log \vartheta = \lambda \quad (11)$$

a csillapodás logaritmusi decrementuma.

3. Forgatott mérlegrúd. A földnehézségi erő változásának és a középpontfutó erőnek befolyása a rúd lengéseire.

A czimben kimondott, itt általános esetben a fent (3) és (6) alatt kifejezett $F_{(g)}$ és $F_{(k)}$ forgató nyomatékokhoz még hozzá lép a földnehézségi erő változásából és a centrifugalis erő folytán származó egy-egy pótló forgatónyomaték.

3a. Az \bar{OZ} körüli, \mathfrak{T} szakaszú forgatás az egész eszköznek mérleg-állványnak) és vele együtt a lengő mérlegrúdnak is egyenletes

$$\frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \quad (12_a)$$

nagyságú szögsebességet tulajdonít; akkor a mérlegrúd m tömegpontjának az y koordinátája, vonatkoztatva a földdel mereven egybekapcsolt (XYZ) koordináta-rendszerre, következőleg írható:

$$y = \varrho_c \sin \left(2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} + a \right), \quad (12)$$

a hol ϱ_c az m tömegnek a forgatás \bar{OZ} tengelyétől való merőleges távolsága, továbbá a az a szög, a melyet a $\varrho_c = \bar{O'P}$ forgó egyenes az (aOc) forgó sikkal alkot, és végre $2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}}$ az a forgás-

szög, a melyet ez a forgó sík, a (cOa) , és a földdel mereven egybekapcsolt, szilárd (XOZ) sík (az O -n átmenő földrajzi délkör síkja) egymással bezár.

Itt figyelembe veendő, hogy az α szög az időtől független és hogy e szögnek az értéke a mérlegrúd minden egyes m tömegű pontjára nézve egy-egy meghatározott, állandó érték.

Ezek szerint a forgatott m tömegpontnak mindenkor *nehézségi erőváltozása*, azaz *súlyváltozása* az (1) és (12) formula alapján :

$$m\Delta g = -2m\Omega \cos \varphi \frac{dy}{dt} = -2m\Omega \cos \varphi \cdot \frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \cdot \rho_c \cos \left(2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} + \alpha \right),$$

avagy, annál a körülménynél fogva, hogy az α szög különböző m tömegpontokra nézve különböző értékeket is mutathat fel:

$$m\Delta g = -2\Omega \cos \varphi \cdot \frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \cdot (m\rho_c) \left\{ \cos \alpha \cos \left(2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} \right) - \right. \\ \left. - \sin \alpha \sin \left(2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} \right) \right\}. \quad (13)$$

Ámde a 2. ábra szerint a_0 , b_0 , c_0 az m pont folyó koordinátái az $\overline{Oa_0}$, $\overline{Ob_0}$, $\overline{Oc_0}$ tengelyrendszerre nézve, a mely, miként a 3. §. elején említettük, az \overline{Oa} , \overline{Ob} , \overline{Oc} koordináta-rendszerrel a közös, mindig vízszintes $Ob_0 = \overline{Ob}$ tengellyel bír, de hozzáképest e közös tengely körül α szöggel el van forgatva.

Ebből folyólag az α és az a_0 , b_0 , c_0 koordináták között, valamint ezek és az a , b , c koordináták között a következő vonatkozások állanak fenn:

$$\cos \alpha = \frac{a_0}{\rho_c}; \quad \sin \alpha = \frac{b_0}{\rho_c}. \quad (14)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= a \cos \varepsilon + c \sin \varepsilon; \\ b_0 &= b; \\ c_0 &= c \cos \varepsilon - a \sin \varepsilon. \end{aligned} \quad (15)$$

Ezek felhasználásával az $m\Delta g$ a (13)-ból:

$$(m\Delta g) = -2\Omega \cdot \cos \varphi \cdot \frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \left[(ma_0) \cos \left(2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} \right) - \right. \\ \left. - (mb_0) \sin \left(2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} \right) \right]. \quad (16)$$

Ez a nehézségi erőváltozás függőlegesen *felfelé* van irányítva és az *Ob*-tengely körül (a mérlegrúd *éle* körül) a következő forgató nyomatékot létesíti:

$$m \cdot a_0 \Delta g = + 2\Omega \cos \varphi \cdot \frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \left\{ (ma_0^2) \cos \left(2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} \right) - \right. \\ \left. - (ma_0 b_0) \sin \left(2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} \right) \right\};$$

a mely a (3)-ban kifejezett $F_{(g)}$ forgató nyomatékkal ellentett irányú, mert az ε szög növesztésére törekszik.

Ezek szerint adódik az a forgató nyomaték, a melyet a forgatás okozta nehézségi erő-változás az egész lengő testre kifejt, vonatkoztatva a mérlegrúd élére, mint a lengés tengelyére:

$$F_{(Jg)} = \Sigma (ma_0 \cdot \Delta g)_t = \\ = \frac{4\pi}{\mathfrak{T}} \Omega \cos \varphi \left\{ (\Sigma ma_0^2) \cos \left(2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} \right) - (\Sigma ma_0 b_0) \sin \left(2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} \right) \right\}, \quad (17)$$

avagy:

$$F_{(Jg)} = + \frac{4\pi}{\mathfrak{T}} \cdot \Omega \cdot \cos \varphi (\Sigma ma_0^2) \cos \left(2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} \right) - \\ - \frac{4\pi}{\mathfrak{T}} \cdot \Omega \cdot \cos \varphi (\Sigma ma_0 b_0) \sin \left(2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} \right). \quad (18)$$

Az itt jelentkező összegek: (Σma_0^2) és $(\Sigma ma_0 b_0)$ a tehetetlenségi nyomatékok jellegét mutatják és a (15) transformáló egyenletek szerint még írhatók:

$$\Sigma ma_0^2 = \cos^2 \varepsilon (\Sigma ma^2) + \sin (2\varepsilon) (\Sigma mac) + \sin^2 \varepsilon (\Sigma mc^2); \quad (19) \\ \Sigma ma_0 b_0 = \cos \varepsilon (\Sigma mab) + \sin \varepsilon (\Sigma mbc).$$

3b. De az eszköz forgatása folytán (a mely a függőleges $\bar{O}\bar{Z}$ tengely körül meggyen végbe) *középpontfutó erő* is keletkezik, a mely szintén forgató nyomatékot létesít és a mérlegrúd lengési idejét befolyásolja.

A 2. ábra szerint q_c , miként már a megelőző 3a. pontban, jelenti a P helyzetű m tömegpontnak az $\bar{O}\bar{Z}$ forgás-tengelytől való merőleges távolságát $\bar{O}'P$ -t; e forgásból folyólag az $\bar{O}'\bar{P}$

egyenes mentén oly centrifugális erő lép fel, melynek nagysága:

$$m \cdot \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \right)^2 \cdot \varrho_c, \quad (20)$$

melynek közvetlen foggpontja a P -helyű m tömegpont, de a melyet közvetve az O' pontban működőnek is szabad felvennünk, mivel a forgó mérlegrúd *merev* test.

Ezt az erőt két összetevőre bonthatjuk szét: az egyik Pa' mentén, a másik Pb' mentén működőnek tekinthető; e két összetevő nagysága:

$$m \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \right)^2 \cdot \varrho_c \cdot \frac{a_0}{\varrho_c}; \quad m \cdot \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \right)^2 \cdot \varrho_c \cdot \frac{b_0}{\varrho_c}.$$

Az első összetevő az Ob él körül egy

$$m \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \right)^2 \cdot a_0 c_0$$

nagyságú forgató nyomatékot létesít; a másik összetevő azonban párhuzamos ez élhez és így nem fejthet ki az \overline{Ob} körül forgató-nyomatékot; e szerint nem is gyakorolhat befolyást a mérlegrúd lengő mozgására.

Ezek alapján a középpontfutó erők által a forgatott mérlegrúdra kifejtett összes forgatónyomaték, vonatkoztatva az \overline{Ob} élre:

$$F_{(x)} = + \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \right)^2 (\Sigma m a_0 c_0). \quad (21)$$

Ez a nyomaték, különösen hosszúszerű mérlegrúd esetén, továbbá kicsiny $\overline{OO}_0 = s$ távolságnál és kicsiny ε lengésszögek-nél *mindig negatív*, mert az ε szöget kisebbiteni törekszik; ez a körülmény itt *positív* előjelet követel, mert, miként a (22)-, a (24)- és a (25)-ből ki fog tetszeni, a $(\Sigma m a_0 c_0)$ összeg az előbb mondottak mellett negatív.

Az itt jelentkező $(\Sigma m a_0 c_0)$ összeg szintén tehetetlenségi nyomaték jellegű; a (15) transformáló formulák szerint adódik:

$$\Sigma m a_0 c_0 = \frac{1}{2} \sin(2\varepsilon) (\Sigma m [-a^2 + c^2]) + \cos(2\varepsilon) (\Sigma m a c). \quad (22)$$

3c. Az $F_{(A_0)}$ és $F_{(x)}$ forgató nyomatékok egyszerűsítése *symmetrikus szerkezetű mérlegrúd esetén.*

A (19) és (22) kifejezésekben fellépő összegek redukálva vannak a

$$\Sigma ma^2; \Sigma mc^2; \Sigma mbc; \Sigma mca; \Sigma mab$$

összegekre.

E 3. §. elején említettük, hogy a lengő mérlegrúd *symmetrikus* alkotású legyen, melynek két *symmetria-síkja* a (bOc) - és a (cOa) -sík; míg a harmadik ily *symmetria-sík* párhuzamos az (aOb) síkkal, de az O_0 tömegponton haladjon keresztül.

Könnyű lesz most az előbbi összegek közül a következő hármat, ugyanis az

$$\Sigma mbc; \Sigma mca; \Sigma mab \quad (23)$$

összegek mindegyikét oly egyes pontpárok összegére bontani, a mely párok mindegyike külön-külön zérus, s így ez összegek is zérusok.

Így az Σmbc összegben csupa oly pontpárok lépnek fel, a melyek m pontjai rendre $+mbc$ és $-mbc$ szorzományokat szolgáltatnak, mert ez összegre nézve a *symmetria-sík* a (aOc) sík lévén, a pontpárhoz tartozó koordináták

$$+a, +b, +c \text{ és } +a, -b, +c.$$

Éppen így az Σmca összegre nézve a (bOc) a *symmetria-sík*; a pontpárok, a melyekre ez az összeg szétbontható, $+mca$ és $-mca$ szorzományokat szolgáltatnak és a két m tömegpont koordinátái itt:

$$+a, +b, +c; \text{ és } -a, +b, +c.$$

Végre az Σmab összegre nézve a (bOc) és az (aOc) síkok a *symmetria-síkok* és a pontpárok, a melyekre ez az összeg szétbontható, az $+mab$ és $-mab$ szorzományokat szolgáltatják; a két idetartozó m tömegpont koordinátái lehetnek:

$$+a, +b, +c \text{ és } -a, +b, +c;$$

$$\text{vagy: } +a, +b, +c \text{ és } +a, -b, +c.$$

Ezek szerint a fentírt (23) összegek zérussal egyenlők.

Legyen továbbá K_a és K_c a lengő testnek tehetetlenségi nyomatéka az \overline{Oa} , illetőleg az \overline{Oc} tengelyre vonatkozólag; ezekre nézve áll:

$$K_a = \Sigma m (b^2 + c^2); \quad K_c = \Sigma m (a^2 + b^2); \quad (24_a)$$

azaz nyerjük a (22)-ben írt jobboldali összegek elsejére nézve:

$$-(\Sigma m (a^2 - c^2)) = K_a - K_c. \quad (24)$$

Mindezeket tekintetbe véve, az (19)- és (21)-ben írt összegekből marad:

$$\begin{aligned} \Sigma m a_0^2 &= \cos^2 \varepsilon (\Sigma m a^2) + \sin^2 \varepsilon (\Sigma m c^2); \\ \Sigma m a_0 b_0 &= 0; \\ \Sigma m a_0 c_0 &= \frac{1}{2} \sin (2\varepsilon) \{K_a - K_c\}. \end{aligned} \quad (25)$$

E szerint a (18) és (21) alapján az $F_{(A_g)}$ és az $F_{(x)}$ forgatónyomatékok redukálódnak a következő kifejezésekre:

$$\begin{aligned} F_{(A_g)} &= + \frac{4\pi}{\mathfrak{T}} \cdot Q \cdot \cos \varphi \{ \cos^2 \varepsilon (\Sigma m a^2) + \\ &\quad + \sin^2 \varepsilon (\Sigma m c^2) \} \cos \left(2\pi \cdot \frac{t}{\mathfrak{T}} \right); \end{aligned} \quad (26)$$

$$F_{(x)} = + \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \{K_a - K_c\} \sin (2\varepsilon). \quad (27)$$

4. A lengő mérlegrúd mozgás-egyenlete első megközelítésben. Teljes megoldása.

A fentiekben a (3), (6), (26), (27)-ben előtüntetett kifejezéseiből a ható $F_{(g)}$, $F_{(k)}$, $F_{(A_g)}$, $F_{(x)}$ forgató nyomatékoknak a mérlegrúd mozgás-egyenlete:

$$K_b \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = F_{(g)} + F_{(k)} + F_{(A_g)} + F_{(x)},$$

avagy:

$$\begin{aligned} K_b \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} &= - Mgs \cdot \sin \varepsilon - \Gamma \frac{d\varepsilon}{dt} - \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \right)^2 \frac{1}{2} (K_c - K_a) \sin (2\varepsilon) + \\ &\quad + \frac{4\pi}{\mathfrak{T}} \cdot Q \cos \varphi \{ \cos^2 \varepsilon (\Sigma m a^2) + \sin^2 \varepsilon (\Sigma m c^2) \} \cos \left(2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

E mellett feltételeztük azt, hogy a mérlegrúdra ható csilla-

pító erő az eszköznek forgatása folytán nem szenved változást, azaz, hogy Γ ugyanaz marad a nem forgatott és a forgatott eszközre nézve; ez oly feltevés, mely nagyon valószínűnek mondható. Az ettől netán felmerülhető eltérést csak külön e végből megejtendő oly kísérleti megvizsgálás alapján lehetne megállapítani, a melynél a mérlegrúdnak csillapítási viszonya úgy a nem forgatott, mint a forgatott eszköz esetén figyeltetnék meg. Az eddigi, itt a forgatott mérlegrúd esetén e czélból végzett megfigyelések nem mutatkoztak eléggé alkalmasnak arra, hogy segítségükkel e kérdést véglegesen eldönteni lehetne.

4a. A (28) alatti mozgásegyenletet minden elhanyagolás mellőzésével állítottuk elő; de az e formájában megnyilatkozó összefüggés az ϵ lengési szög és a t folyó idő között nem nagyon egyszerű, s így az egyenlet tárgyalása és fejtegetése jelentékeny bonyodalmakkal járna.

Ezért az egyenlet első megközelítése tárgyalására szorítkozunk, mely teljesen megfejthető; ez a megközelítés egyszersmind kielégítő betekintést nyújthat az itt várható lengési vonatkozásokba.

Legyen e szerint a továbbiakban az ϵ változó szög oly kicsiny, hogy a $\sin \epsilon$, $\frac{1}{2} \sin (2\epsilon)$, $\cos^2 \epsilon$, $\sin^2 \epsilon$ helyébe rendre írhatjuk az értékeket:

$$\epsilon; \quad \epsilon; \quad 1; \quad 0.$$

Ekkor a (28) egyenletből:

$$K_b \frac{d^2 \epsilon}{dt^2} = -Mgs \cdot \epsilon - (K_c - K_a) \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^2 \cdot \epsilon - \Gamma \frac{d\epsilon}{dt} + \frac{4\pi}{\tau} \cdot Q \cos \varphi (\Sigma ma^2) \cos \left(2\pi \frac{t}{\tau} \right); \quad (29)$$

és ha rövidség kedvéért írunk:

$$\begin{aligned} \frac{Mgs}{K_b} &= \omega_0^2; & \frac{Mgs}{K_b} + \frac{K_c - K_a}{K_b} \cdot \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^2 &= \omega^2; \\ \frac{\Gamma}{K_b} &= k; & \frac{4\pi}{\tau} \cdot Q \cos \varphi (\Sigma ma^2) &= A; \end{aligned} \quad (30)$$

lesz:

$$\frac{d^2 \epsilon}{dt^2} + k \cdot \frac{d\epsilon}{dt} + \omega^2 \cdot \epsilon = \frac{A}{K_b} \cdot \cos \left(2\pi \frac{t}{\tau} \right). \quad (31)$$

Ez egyenlet teljes megoldása így írható:¹

$$\varepsilon = E \cdot e^{-\frac{1}{2}kt} \cdot \cos \left(t \sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4}k^2} + 2\pi\delta \right) + \frac{A}{K_b} \cdot \frac{1}{\left\{ \left[\left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \right)^2 - \omega^2 \right]^2 + \frac{4\pi^2}{\mathfrak{T}^2} k^2 \right\}^{1/2}} \cdot \cos \left(2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} + 2\pi\Delta \right); \quad (32)$$

hol E és δ az integratio állandói és a Δ -ra nézve áll:

$$\operatorname{tg} (2\pi\Delta) = \frac{\frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \cdot k}{\left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \right)^2 - \omega^2}. \quad (33)$$

Ebben az alakjában ez az általános megoldás mutatja, hogy az ε teljesen különböző jellegű két részből áll.

Az *első tagja* ugyanis

$$E \cdot e^{-\frac{1}{2}kt} \cdot \cos \left(t \sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4}k^2} + 2\pi\delta \right), \quad (34)$$

hasonlóan mint a (8)-ban, egy csillapított egyszerűen harmonikus lengést jelent, melynek amplitudója

$$E \cdot e^{-\frac{1}{2}kt} \quad (35)$$

az idő folytával fogy és rendszeren rövid időn belül észrevehetetlen kicsiny lesz; e lengés időszakasza T' , hol:

$$\omega^2 - \frac{1}{4}k^2 = \left(\frac{2\pi}{T'} \right)^2 = \frac{Mgs}{K_b} + \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \right)^2 \cdot \frac{K_c - K_a}{K_b} - \frac{1}{4}k^2;$$

vagy tekintettel (5)-re

$$\left(\frac{2\pi}{T'} \right)^2 - \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \right)^2 \cdot \frac{K_c - K_a}{K_b} - \frac{1}{4}k^2. \quad (36)$$

A lengés logarithmusi dekrementuma itt, hasonlóan, mint (11)-ben

$$\log \vartheta' = \frac{1}{4}kT';$$

¹ V. ö. például ФРОНЛИХ I., *Dynamika* 198. §, 456–459. l. Budapest, 1896. Különösen a (10) kifejezések másodikát.

úgy, hogy

$$k = \frac{4 \log \vartheta'}{T'}, \quad (37)$$

a hol azonban, miként fent a 15. oldalon említettük, feltételeztük azt, hogy k csillapodási együttható nem szenved változást az egész eszköznek az \bar{OZ} függélyes tengely körüli forgatása folytán.

A második tagja az általános megoldásnak a (32) kifejezésnek az a része, a mely az időben maradandó, egyszerűen harmonikus, de *kényszerített* lengést jelent:

$$\frac{1}{K_b} \cdot \frac{\cos\left(2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} + 2\pi \Delta\right)}{\left[\left(\left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2 \cdot k^2\right]^{1/2}}. \quad (38)$$

E maradandó, stationárius lengés amplitudója *maximumot* ér el, ha

$$\left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2 = \omega^2; \quad (39)$$

szóval itt *mozgásbeli resonantia* következik be, a mikor

$$\frac{2\pi}{\mathfrak{T}} = \frac{2\pi}{T'_0} \quad \text{vagy} \quad \mathfrak{T} = T'_0, \quad (40)$$

hol a (30) szerint

$$T'_0 = 2\pi \left\{ \frac{Mgs}{K_b} + \frac{K_c - K_a}{K_b} \cdot \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2 \right\}^{-1/2},$$

avagy még (5) szerint:

$$\left(\frac{2\pi}{T'_0}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{K_c - K_a}{K_b} \cdot \left(\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}\right)^2. \quad (41)$$

Itt T'_0 jelenti a lengő mérlegrúd ama kettős lengési idejét, a melyet e rúd mutatna, a mikor a közönséges földnehézségi erőn kívül még azok a középpontfutó erők működnének, a melyek az \bar{OZ} tengely körüli forgatás folytán keletkeznek; e mellett azonban a csillapodás nem lépne fel, és a földnehézségi erő változása sem volna jelen.

E szerint a (38)-ban kifejezett kényszerített lengés ampli-

tudójának a $\mathfrak{T} = T'_0$ resonantiánál fellépő maximalis értéke lesz:

$$A_{\max} = \frac{A}{K_b} \cdot \frac{1}{\frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \cdot k} = \frac{A}{K_b} \cdot \frac{T'_0}{2\pi k}, \quad (42)$$

hol a (11) és a (37) szerint:

$$kK_b = \frac{4K_b}{T} \log \vartheta = \frac{4 \cdot K_b}{T'} \log \vartheta';$$

és benne a (9), (10), (11) szerint T és a ϑ a *nem* forgatott készülék esetén a mérlegrúd csillapított mozgásából egyenes megfigyelések alapján határozható meg. A (30) tekintetbevételével a fent írt maximalis amplitudo:

$$A_{\max} = 2\Omega \cos \varphi \frac{\Sigma m a^2}{k \cdot K_b}, \quad (43)$$

a miből a $k \cdot K_b$ értékének a (11) és a (37)-ből való helyettesítésével

$$\Omega \cos \varphi = 2A_{\max} \frac{K_b}{\Sigma m a^2} \frac{\log \vartheta}{T'}; \quad (44)$$

az utolsó tényező helyett, mint fent is, írható: $\frac{\log \vartheta'}{T'}$.

Szabadjon itt megjegyeznem, hogy a K_b tehetetlenségi nyomaték kísérletileg meghatározható, vagy pedig, pontosan méretezett és kidolgozott mérlegrúdnál, számbelileg is igen jól kiértékesíthető; az A_{\max} értékét közvetlenül szolgáltatja a megfigyelés; v. ö. alább a 4. §-ot; továbbá, az $(\Sigma m a^2)$ összeg jelenti a rúdnek a *(bOc)* symmetria-síkra vonatkoztatott négyzetes tömegnyomatékát, a mely symmetrikus mérlegrúd esetén szintén könnyen kiértékesíthető. Végre pedig vonatkozik a T és a ϑ , mint eddig is mindig, a *nem* forgatott mérlegrúdnak egyszerűen harmonikus, csillapított mozgására, (6)—(11), a mely adatok egyenes megfigyelésekből erednek.

Ez utóbbiakkal szemben a T' és a ϑ' mennyiségeknek közvetlen észleletek alapján való meghatározása bizonyos kísérleti nehézségekbe látszik ütközni, miként már fent, a 4. pont

végén a (28) után jeleztük; mindazonáltal számbelileg kiértékelhetők a mérlegrúd méreteiből és tömeg-eloszlásából.

Abban az esetben, ha az eszköz forgatása folytán a csillapító erő nem változik, akkor mindig áll:

$$\frac{1}{4} k = \frac{\log \vartheta}{T} = \frac{\log \vartheta'}{T'}.$$

Sajnos, jelenleg nem állanak rendelkezésemre rendszeres, quantitative végzett megfigyelések vagy ilyenek eredményei; és nem végezhetek egyhamar, mostani beteg állapotomban ily kísérletezéseket.

Legyen szabad azonban felemlítenem, hogy eddigi kísérleteimhez fémből készített oly mérlegrudakat használtam, a melyek kettős lengési tartama húsz- és harmincz másodperc között volt; ezek a kívánt czélnek megfelelték.

Válasszunk lengő testnek például oly mérlegrudat, mely egyszerűen derékszögű téglány-alakú, éleinek *félhossza* pedig rendre:

$$a = 3 \text{ cm}; \quad b = 2 \text{ cm}; \quad c = 1 \text{ cm};$$

térfogata e szerint 48 cm^3 ; ha még tömege sűrűségét 10-nek választjuk, akkor egész tömege: $M = 480 \text{ gramm}$.

A továbbiakra nézve adódik:

$$K_b = \frac{1}{3} M(c^2 + a^2) = 1600 \text{ gr.cm}^2,$$

valamint az összeg:

$$\Sigma ma^2 = \frac{1}{3} M \cdot a^3 = 1440 \text{ gr.cm}^2.$$

E szerint a (44)-ben fellépő hányados itt:

$$\frac{K_b}{\Sigma ma^2} = \frac{10}{9};$$

azaz, a számegységnél valamivel nagyobb érték.

Ha a mérlegrúd alakja az \overline{Oa} tengely mentén még jobban van megnyújtva, ez a hányados még jobban közeledik a számegységhez.

4. §. Hogy figyelhető meg és hogy határozható meg kényszerített lengések maximális kilengése?

Ha a maximális amplitudo elég nagy és elér például néhány ívfokot, akkor a megnövekedése egészen az elérhető határértékig már szabad szemmel követhető; mutatók segítségével, a milyenek a közönséges mérlegkaroknál a mérleg-nyelvek, az amplitudo mérése jobban végezhető.

Kisebb kilengéseknél azonban és a mérhetőség pontosságának emelése végett szükségesnek látszik a szögmérésnél használatos optikai segédeszközöket alkalmazni. Az előálló jelenség akkor nagyon éles alakban jelentkezik, a mely mint előadási kísérlet is jól értékesíthető.

A 3. ábra talán fölöslegessé tesz minden további leírást.

A függőleges tengely körüli forgatás által létesített hajlása a lengő testnek a maximális amplitudo mértékeként szolgál.

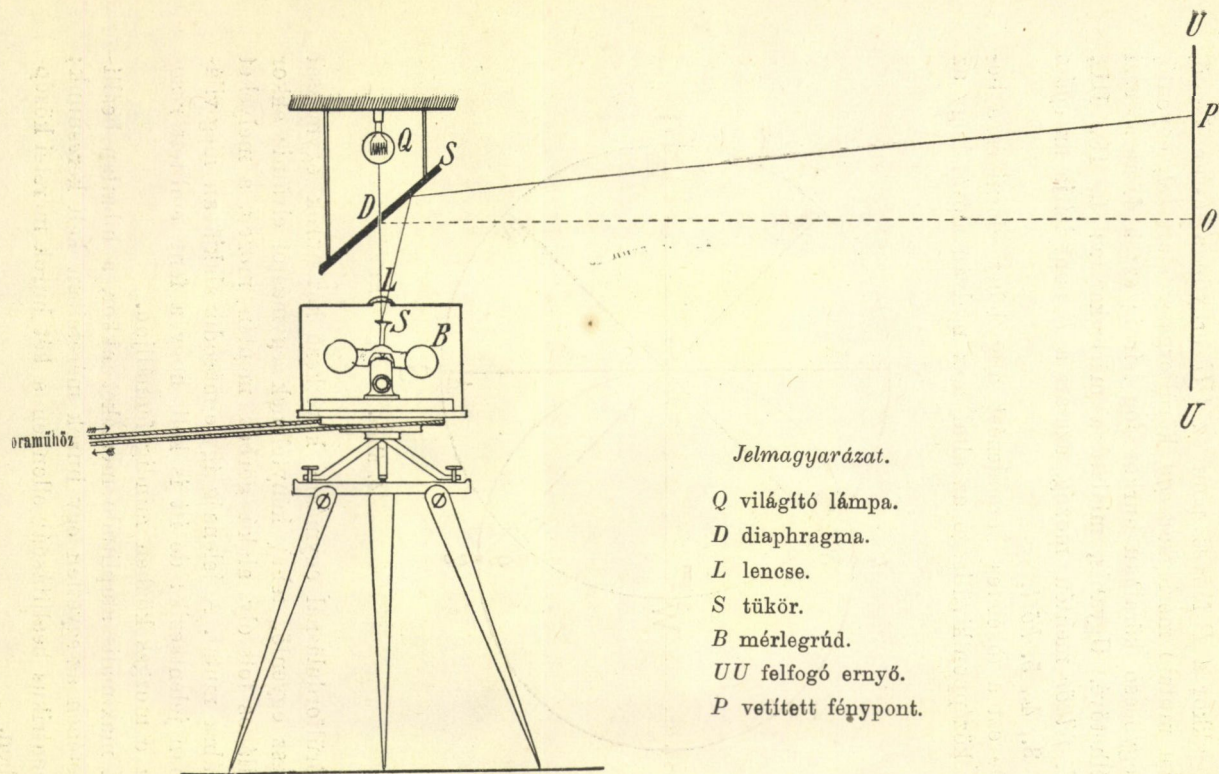
Tekintsük meg közelebbről az általam használt készülékeket.

Szilárd, ingadozásoknak alá nem vetett alapzatra oly forgatható állvány van felállítva, mely a theodolith-éhoz hasonló szerkezetű; állító csavarok segítségével az állvány forgás-tengelye pontosan a függélyesbe hozható; e forgást egy alkalmas óramű létesíti.

A B mérlegkar lengéseit a következő módon teszszük láthatóvá és mérhetővé:

A jól világító Q lámpa által átvilágított D diaphragma nyílását lehetőleg pontosan a függélyes forgási tengelybe állítjuk fel. A D nyílásból lefelé haladó sugárnyaláb az eszköz szekrényére alkalmasan erősített L lencsén át a B mérlegkarra erősített kicsiny S tükörre esik; onnan visszaverődést szenved és újra az L lencsén áthaladva, a D diaphragma alsó, ezüstözött, tükröző lapjára jut, onnan visszaverődik és a felfogó UU ernyő P pontját találja és ott mint világos folt jelenik meg. Ez a fénylő, mozgó P pont akkor a következő pályát írja le, mindig feltéve, hogy a fent, a 3. §. 4_a pontjában részletezett: $\mathfrak{T} = T'_0$ resonantia (39), (40), (41) szerint bekövetkezett és a forgatás közben fennáll.

Ha a mérlegkar visszaverő kis tükrenek beállítása hibátlan, azaz, a mikor a mérlegkar nyugalmi helyzetében úgy e tükör



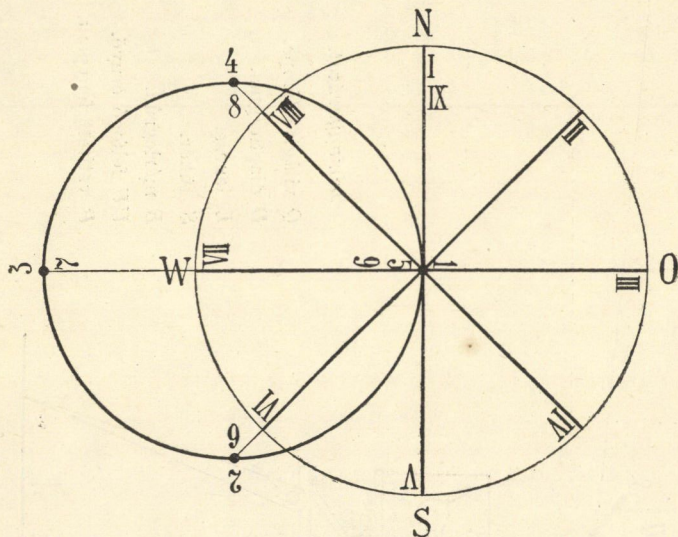
Jelmagyarázat.

- Q* világító lámpa.
D diaphragma.
L lencse.
S tükör.
B mérlegrúd.
UU felfogó ernyő.
P vetített féppont.

3. ábra.

tengelye, mint a felülről beejtett sugárnyaláb pontosan függőleges: akkor a P fényes pont az UU ernyőn a lassan lengő, hajlítást mutató mérlegkar *egy* körülforgása alatt *két*, egyenlő, azaz egybeeső köralakú hurkot fog leírni; ezt a 4. ábra teszi szemléltethetővé. Ugyanis, mialatt a mérlegkar az I., II., III., IV., V. *félkör* mentén mozog, az alatt a P pont leírja az *egész* 1., 2., 3., 4., 5. *kört*.

De ezt a tökéletes berendezést alig lehet elérni és a beállítás középpontkivülisége az által lesz nyilvánvalóvá, hogy az

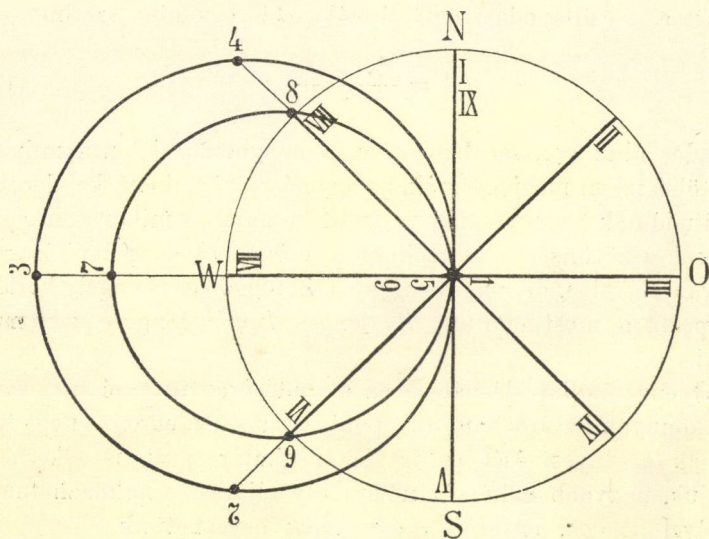


4. ábra.

egy körülfordulásnál egymásra következő két hurok egymással nem lesz egyenlő, tehát kénytelenek egymástól elválni; ekkor a P világos folt oly alakú görbék mentén mozog, a melyeket az 5. ábra mutat. A jelenség így e második alakjában még világosabban jelentkezik; de itt is kell, hogy a fent említett *resonantia* e mozgás közben mindig fennálljon.

A maximalis amplitudo mértékét akkor, a hibátlan beállítás esetében az egyetlen egy hurok méreteiben kell keresnünk; az excentrikus beállításnál ellenben a két hurok méretei középértékében.

Sajnos, pontos adatokat nem nyújthatok, minthogy súlyos betegségem következtében munkálkodásomat félbe kellett szakítanom; és mert még most is ágyban fekvő vagyok, adataimat nem egészíthetem ki egyhamar. Mindazonáltal felemlíthetem azt, hogy húsz és egynéhány másodpercet kitevő \mathcal{T} körülforgási idő mellett oly lengéseket nyertem, a melyek egy körülbelől öt méter távolságban lévő felfogó ernyőn egy méter átmérőjű hurkok keletkezése által váltak felismerhetővé.



5. ábra.

A fentiekben vázolt módszer sikeres végrehajtásának egyik főfeltétele abban áll, hogy okvetetlenül szükséges, miszerint a készülék felállítása lehetőleg rázkódtatásoktól mentes legyen; mert ha e rázkódtatások szakaszos természetűek volnának, akkor ezek a megvizsgálandó lengéseket könnyen az által is meghamisíthatnák, hogy a keresett periodusokat saját időszakos impulzusaikkal zavarólag befolyásolhatnák.

Továbbá, a mint az természetes, szintén egyik főfeltétele a sikernek az oly kifogástalan óraműnek a használata, melynek folytonos és egyenletes a járása. Az általam használt, kitűnő

óramű a cambridgei műhelyekből való; eredetileg csillagászati messzelátók hajtása céljaira készült.

5. Compensatiós eljárás.

A (43) egyenletben nyertük az összefüggést:

$$A_{\max} = 2Q \cos \varphi \frac{1}{k} \cdot \frac{\Sigma m a^2}{K_b}. \quad (45)$$

Itt a k csillapodási együttható a (11) egyenlet szerint

$$k = \frac{4 \cdot \log \vartheta}{T} \quad (11)$$

hányados által van meghatározva, a melyben ϑ jelenti, miként már több ízben megjegyeztük, az egymásra következő két lengés amplitudóinak az egységnél nagyobb osztatát, a mikor a mérlegrúd csak a közönséges földnehézségi erőnek és a csillapító erőnek van alávetve, de *nem* forog az OZ függőleges tengely körül; a T pedig a most említett *ily* lengés *kettős* lengése tartamát jelenti.

Gyenge csillapodásnál ez az állandó k együttható nem egészen könnyen határozható meg pontosan; s ha ennek az együtthatónak érvényesülését és így a meghatározását is elkerülni óhajtjuk, nagyobb nehézség nélkül oly eljárást alkalmazhatunk, a melyet itt *compensatiós módszernek* nevezhetünk.

Nevezetesen: lengő mérlegrúd-szerkezetünket még más szakaszos impulsusoknak is tehetjük ki, mint a földnehézségi erő ama változásai által létesítetteknek, a mely változások e szerkezetnek a függélyes tengely körül való forgatása folytán keletkeztek.

Ilyenmű másfajta impulsusok létesítésére különösen alkalmasak a *mágnességi* erők. Lengő mérlegrúdunkra, és pedig közepe táján, egy vagy két kicsiny mágnesset úgy akarunk reá erősíteni, hogy *tengelyeik függőlegesek* és *déli pólusuk lefelé* irányítva legyenek. A két hatásnak (ugyanis a mérlegrúd forgatása és a földmágnesség vízszintes összetevője által létesített forgatónyomatéknak) egyszerű egymásra rakásából (superposi-

tiójából) nyerjük a (26) alapján és a földmágnesség rendes hatása szerint az eredő *impulsust*, a mely itt váltakozó forgatónyomatékképpen jelentkezik:

$$\frac{4\pi}{\mathfrak{T}} \cdot Q \cdot \cos \varphi (\Sigma ma^2) \cos \left(2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} \right) - hM \cos \left(2\pi \frac{t}{\mathfrak{T}} \right), \quad (46)$$

hol h a földmágnességi erő vízszintes összetevőjét jelenti és M a használt, a mérlegrúdra erősített mágnesek összes mágnességi nyomatékát.

A felírt forgató nyomaték az \overline{Ob} élre vonatkozik; ez impulsus amplitudója:

$$\mathfrak{A} = \frac{4\pi}{\mathfrak{T}} \cdot Q \cdot \cos \varphi (\Sigma ma^2) - M \cdot h. \quad (47)$$

Most kísérletünket úgy akarjuk berendezni, hogy a következő két feltétel teljesedjék: ugyanis *a)* a lengő mérlegrúd ket-tős lengési ideje egyenlő legyen az \overline{OZ} körüli forgatás egy körülforgása időtartamával, azaz a (40) szerint

$$\mathfrak{T} = T'_0; \quad (40)$$

és *b)* egyidejűleg a mérlegrúd egyensúlyi helyzete az (aOc) síkban oly módon legyen elérhető, hogy e helyzete egyszersmind a rúd *nyugalmi helyzete* is legyen, szóval, hogy akkor a fentírt \mathfrak{A} amplitudo is zérussal egyenlő:

$$\mathfrak{A}_0 = 0. \quad (48)$$

Ha e két feltétel egyidejűleg elérhető, akkor az $\mathfrak{A} = 0$ -ból folyik:

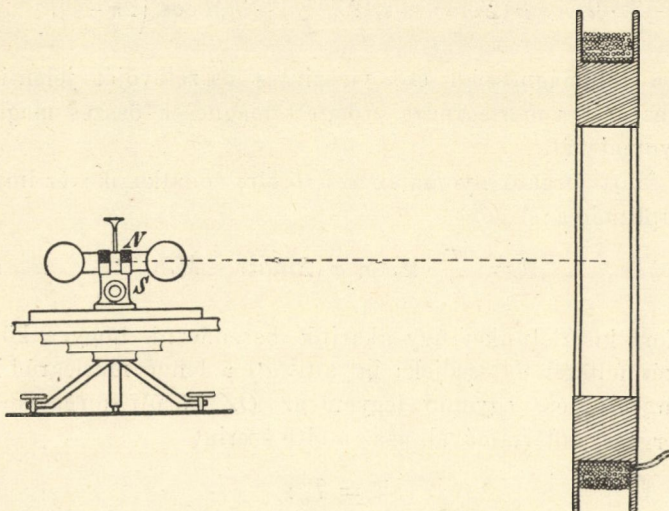
$$Q \cos \varphi \cdot \frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \cdot 2 (\Sigma ma^2) = HM. \quad (49)$$

Itt H jelenti azt az eredő mágnességi erőt, a mely létesül, ha a földmágnességi h erőhöz valamely Δh pótló vízszintes mágnességi erő hozzájárul, lévén

$$H = h + \Delta h. \quad (49_a)$$

Ezt a mágnességi pótló erőt legczélszerűbben elektromágnességi tekercs által létesíthetni, a mint ezt a 6. ábra mutatja.

E végből az ily tekercsnek oly elhelyezést adhatunk, hogy az eredő mágnességi *vízszintes*, H erő a *földrajzi délkörbe* essék; akkor egyszersmind a fent (46) alatt írt kifejezése az impulsus forgatónyomatékának helyes lesz.



6. ábra.

Ilyformán a (49) formula az általunk felállított problémát teljesen megfejtí és így belőle:

$$Q \cdot \cos \varphi = \frac{HM}{4\pi} \cdot \frac{\mathfrak{T}}{\Sigma m a^2}; \quad (50)$$

azaz az $Q \cos \varphi$ keresett értéke adódik, és pedig jól mérhető mennyiségek segélyével kifejezetten; és ezzel egyszersmind a földtengely körüli forgásának szögsebessége ezen az úton is meghatározható.

6. §. Befejező megjegyzések.

A szaktárs, a ki nem sajnálta azt a fáradságot, a melyet neki az itt előadottak elolvasása okozott s a ki talán némi érdeklődéssel ment e közlésen végig, több tekintetben meg

fog bocsátani; különösen az iránt legyen elnéző, hogy észleleteimet nem részleteztem többrendbeli, habár csak előzetes adatok közlésével.

Magyarázatot nyújthat e tekintetben ennek az értekezésemnek keletkezési módja.

Négy hónap óta ágyhoz lévén kötve, nem folytathattam kísérleteimet és új megfigyeléseket nem végezhettem.

Mindazonáltal már nem várhattam tovább az eddig megállapított ténykörülmények és eredmények közzétételével.

1917. évi május hó 10.-én ugyanis bemutattam az előadó termemben összegyűlt Matematikai és Fizikai Társulatnak a felállított készülékemet és a vele végrehajtott kísérletet, néhány rövid, szóbeli magyarázó közlés kíséretében.

Néhány nappal később meglátogatott KORDA DEZSŐ úr, a zürichi polytechnikumon magántanár, elektrotechnikai előadások tartásával megbízott szakférfiú és engedélyt kért tőlem arra, hogy ezt a kísérletet a Schweizerische Geo-Physikalische Gesellschaft-nak bemutathassa. A valóságban meg is mutatta az ő mérlegrúdjának növekvő amplitudóit.¹ Azonban KORDA tanár még többet is tett; «Relations entre les expériences d'EÖRTVÖS et de FOUCAULT concernant la rotation de la Terre» czímen oly elmélkedéseket közölt,² a melyek czélzatát és czélját nem tudom egészen megérteni; de távol áll tőlem, hogy e jelen közleményem rendjén vele tudományos vitába bocsátkozzam.

Egyet azonban e közlésem végén nem hagyhatok említés nélkül: kedves kollegámnak, FRÖHLICH IZIDOR tanárnak meleg köszönetemet fejezem ki azért a segítségért, a melyben engemet, a beteg embert, különösen a 3. §. bonyolultabb formuláinak összeállítása tárgyában részesített.

De nemcsak az idősebb, hanem a fiatalabb barátaimról is

¹ Extrait des Archives des Sciences Physiques et Naturelles. Genève, Novembre 1917, t. XLIV, p. 369—370.

² Extrait des Communications de la Société Suisse de Physique, Decembre 1918, p. 338—340.

teszek említést, így mindennek előtt FEKETE JENŐ úrról, a ki az ábrák szerkesztése és megrajzolása körül, valamint az egész közlés szövegének összeállítása tekintetében igen nagy segítségemre volt.

Budapesten, 1919. évi márczius hó 31.-én.

(A M. T. Akadémia III. osztálya 1919. évi október 20.-án tartott üléséből.)

FOLYTONOS FÜGGVÉNYOPERATIÓKRÓL.

RIESZ FRIGYES I. tagtól.

Jelentsen F egy az (a, b) számközön értelmezett $f(x)$ függvényekből álló halmazt. Az O_f függvényoperatórióról, mely az F halmaz minden f eleméhez egy meghatározott O_f számértéket rendel, akkor mondjuk, hogy az F halmazra nézve az f helyen *folytonos*, ha a halmazba tartozó és egyenletesen f felé tartó bármely $\{f_n\}$ sorozatra egyszersmind $O_{f_n} \rightarrow O_f$, vagy a mi ugyanaz, ha bármely pozitív ε -hoz megadható olyan pozitív δ , hogy mihelyt F valamely f' elemére nézve

$$|f' - f| < \delta,$$

akkor egyszersmind

$$|O_{f'} - O_f| < \varepsilon.$$

Az O_f operatórióról akkor mondjuk, hogy az F halmazon *egyenletesen folytonos*, ha bármely pozitív ε -hoz megadható olyan pozitív δ , hogy mihelyt valamely F -be tartozó f, f' elem-párra fönnáll az első egyenlőtlenség, akkor egyszersmind teljesül a második is; vagy a mi ugyanaz, ha bármely két, az F -be tartozó — összetartó vagy nem összetartó — $\{f_n\}, \{f'_n\}$ sorozatra nézve, melyekre az $f'_n - f_n$ különbség egyenletesen 0 felé tart, az $O_{f'_n} - O_{f_n}$ különbség is 0 felé tart.

A függvényoperatóriók elmélete tudvalevőleg első sorban azt vizsgálja, miként terjeszthetők ki az egy vagy több változós függvényekre érvényes tételek a függvényoperatóriókra vagy más néven függvények függvényeire. Egy vagy több, de véges számú változós függvény, mely egy *zárt* halmazra nézve a halmaz minden helyén folytonos, egy az analysis elemeibe tartozó alapvető tétel

szerint a halmazon egyenletesen folytonos. Ez a tétel úgyszólván evidens következménye a BOLZANO-WEIERSTRASS-féle kiválasztási tételnek, mely szerint minden végtelen sok elemet tartalmazó, *korlátos* ponthalmazból kiválasztható convergens sorozat. Az általánosabb halmazoknak, köztük a függvényhalmazoknak különösen FRÉCHET által vizsgált elméletében a korlátos ponthalmaz szerepét sok tekintetben a *compact* halmaz veszi át. Az F függvényhalmazról akkor mondjuk, hogy *compact*, ha vagy véges számú elemből áll, vagy pedig bármely végtelen sok elemet tartalmazó részéből kiválasztható egyenletesen összetartó sorozat. Itt a kiválasztási elv már a definicióban szerepel; belőle ugyanúgy, mint az imént említett esetben, következik, hogy *ha az O_f operatio egy zárt és compact F halmazra nézve annak minden helyén folytonos, akkor a halmazon egyenletesen folytonos.* Kérdés azonban, vajon szükséges-e a tétel érvényességéhez az a föltevés, hogy az F halmaz *compact*? Erre a kérdésre igyekszem felelni és először is azt mutatom meg, hogy *semmi esetre sem elegendő azt föltenni, hogy az F halmaz zárt és korlátos.*

Jelentse F a $(0, 2\pi)$ köz minden x helyén értelmezett és a LEBESGUE-féle értelemben integrálható ama függvények összességét, melyekre $|f(x)| \leq 2$. Jelentse továbbá a_k a függvény FOURIER-féle sorában $\cos kx$ együtthatóját. Az

$$O_f = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^k$$

formula nemcsak az F halmazra, hanem a $(0, 2\pi)$ közön integrálható függvények összességére nézve is minden f helyen folytonos függvényoperatiót értelmez. Hogy ugyanis a jobboldalon álló végtelen sor minden f -re összetartó, az a RIEMANN-LEBESGUE-féle lemmából következik, mely szerint $a_k \rightarrow 0$. Hogy az operatio minden f helyen folytonos, azt így bizonyítom be: Ha az f' függvény cosinus-együtthatóit a'_k -val jelölöm és ha

$$|f' - f| < \delta,$$

akkor minden k -ra

$$|a'_k - a_k| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} [f'(x) - f(x)] \cos kx dx \right| \leq 2\delta;$$

innen a $2\delta = h$ jelöléssel

$$|O_f - O_f| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} [|a'_k|^k - |a_k|^k] \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + h)^k - \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^k.$$

Elegendő tehát megmutatni, hogy az utóbbi különbség h elég kis értékeire tetszésszerint kicsinyenyé lesz, vagyis hogy a nem negatív h változónak a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + h)^k \quad (h < 1)$$

végtelen sorral értelmezett függvénye a $h=0$ helyen folytonos.

Jelentsen θ tetszésszerinti pozitív valódi törtet; ha $h < \frac{\theta}{2}$, akkor, minthogy $a_k \rightarrow 0$ és így valamely indextől kezdve $|a_k| < \frac{\theta}{2}$, azért az illető indextől kezdve sorunk tagjai kisebbek a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \theta^k$$

végtelen mértani sor megfelelő tagjainál. Sorunk tehát a $h=0$ hely környezetében egyenletesen összetartó és minthogy tagjai folytonos függvények, összege is az. Ezzel megmutattuk, hogy az O_f operatio minden f helyen folytonos.

Azt állítom, hogy operatiónk az $|f(x)| \leq 2$ föltevással jellemzett, zárt és korlátos F halmazon nem egyenletesen folytonos. Legyen ugyanis

$$f_n(x) = \cos n^2 x, \quad f'_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos n^2 x;$$

akkor egyrészt

$$|f'_n - f_n| \leq \frac{1}{n},$$

azaz az $f'_n - f_n$ különbség egyenletesen 0 felé tart; másrészt

$$O_{f'_n} - O_{f_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} - 1 \rightarrow \infty,$$

vagyis a megfelelő operatioértékek különbsége végtelenbe nő. Ennélfogva *operatióknk az F halmazon nemcsak hogy nem egyenletesen folytonos, de még csak nem is korlátos.*

Megjegyzem, hogy példánkban a LEBESGUE-féle integrál alkalmazása nem lényeges; a fortiori ugyanazt a jelenséget észlelhetjük akkor is, ha az operatiót csupán a RIEMANN-féle értelemben integrálható vagy csupán a folytonos függvényekre értelmezzük és akkor is, ha bármelyik esetben valós függvényekre szorítkozunk; viszont könnyű megmutatni, hogy példánk beválik az operatio folytonosságának más, általánosabb értelmezésénél, például akkor, ha az $|f' - f| < \delta$ föltevés helyébe az

$$\int_0^{2\pi} |f'(x) - f(x)| dx < \delta$$

föltevés lép. Továbbá a $(0, 2\pi)$ köz szerepét bármely mérhető, nem 0-mértékű pontthalmaz átveheti; a $\cos kx$ függvények helyébe más, az illető halmazon orthogonális függvények lépnek. Végül könnyen alkalmazható példánk arra a látszólag nehezebben hozzáférhető esetre is, melylyel ugyanebben az Értesítőben nemrég DIENES PÁL többféle szempontból nagyon részletesen foglalkozott. DIENES azokat az O_f operatiókat vizsgálja, melyek egy pontthalmazon értelmezett összes f függvényekhez (tehát nem csupán az integrálhatókhöz) rendelnek egy-egy O_f értéket; a folytonosság és az egyenletes folytonosság definitiói ugyanazok, mint a melyeket fentebb alkalmaztunk. Erre az esetre azt állítja és véli bebizonyítani, hogy minden folytonos függvényoperatio az $|f(x)| \leq M$ megszorítással jellemzett függvényhalmazon egyenletesen folytonos.¹ Állítása téves. Értelmezzük ugyanis az O_f operatiót a $(0, 2\pi)$ közön megadott bármely f függvényre a következő módon. Legyen először is $\bar{f}(x) = R(f(x))$, azaz egyenlő $f(x)$ valós részével, vagy $= 0$, a szerint, a mint $|R(f(x))| \leq 2$ vagy > 2 . Legyen továbbá $\bar{\bar{f}}(x)$ minden x helyen az $f(x)$ függvénynek az illető helyhez tartozó WEIERSTRASS-féle felső határa. Az

¹ DIENES PÁL: *Kísérlet a functionalszámítás rendszeres megalapozására*, első rész, Math. és Természettud. Értesítő, XXXIV. k., 1916, 154–194. o.; 20. pont.

$\bar{f}(x)$ függvény féligfolytonos, tehát integrálható, ennél fogva értelmezve van rá a példánkban szerepelt O_f operatio. Az O_f^* operatiót most az $O_f^* = O_{\bar{f}}$ relációval értelmezzük. Ha $|f' - f| < \delta$, akkor egyszersmind $|\bar{f}' - \bar{f}| \leq \delta$; ennél fogva az O_f^* operatio is folytonos. Amaz f függvények F^* halmaza, melyekre $|f(x)| \leq 2$, most is zárt és korlátos. A $\cos n^2x$ és $\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos n^2x$ függvények az F^* halmazba tartoznak és rájuk nézve $O_f^* = O_f$. A zárt és korlátos F^* halmazon tehát az O_f^* operatio nemcsak nem egyenletesen folytonos, de még csak nem is korlátos.

Az eddig tárgyalt két példában lényegesen fölhasználtuk a függvényhalmazok speciális sajátosságait. Most olyan eljárást fogok ismertetni, mely sokkal általánosabb jellegű halmazokra is alkalmazható. A nagyon egyszerű eljárás lényegében TIETZE-től ered; tudniillik nem teszek egyebet, mint összefüggésbe hozom kérdésünket a következő, általa megoldott feladattal: szerkesztendő a halmaz elemeinek olyan, mindenütt folytonos függvénye, mely egy bizonyos zárt részhalmazon egy ott megadott folytonos függvénynyel egyezik.¹

Jelentsen H egy halmazt, melynek elemeit f -fel jelöljük és a melynek minden f_1, f_2 elempárjához egy $[f_1, f_2] = [f_2, f_1]$ nem negatív számot rendelünk úgy, hogy bármely három elemre

$$[f_1, f_2] + [f_2, f_3] \geq [f_1, f_3].$$

Az $[f_1, f_2]$ számot az f_1 és f_2 elemek *távolságának* nevezzük. Olyan két elemet, melyeknek távolsága 0, azonosnak tekintünk. Az $\{f_n\}$ sorozatról akkor mondjuk, hogy *összetartó* és *f^* felé tart*, ha $[f_n, f^*] \rightarrow 0$. Halmazunk egy részhalmazát *önmagában sűrűnek* akkor mondjuk, ha minden eleméhez létezik tőle tetszőszerűnti kicsiny távolságra levő, de vele nem azonos, ugyancsak a részhalmazba tartozó elem. Egy részhalmazt akkor mondunk *compactnak*, ha vagy véges számú elemből áll, vagy ha minden végtelen sok elemet tartalmazó részéből kiválasztható összetartó sorozat.

¹ H. TIETZE: *Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind*, Journal für reine u. angew. Mathematik, Bd. 145 (1915), p. 9—14.

Az ilyen abstract halmazokat és a hozzájuk tartozó operatiókat legelső sorban FRÉCHET vizsgálta.¹

Az O_f operációról, mely a halmaz minden eleméhez egy egy meghatározott számértéket rendel, akkor mondjuk, hogy az f helyen folytonos, ha minden f felé tartó $\{f_n\}$ sorozatnak megfelelő $\{O_{f_n}\}$ sorozat O_f felé tart. Az operációról akkor mondjuk, hogy az F részhalmazon egyenletesen folytonos, ha bármely két az F -be tartozó — összetartó vagy nem összetartó — $\{f_n\}$ és $\{f'_n\}$ sorozatra nézve, melyekre $[f'_n, f_n] \rightarrow 0$, egyszersmind $O_{f'_n} - O_{f_n} \rightarrow 0$.

Megmutatom, hogy ha a H halmaz F részhalmaza önmagában sűrű, de nem compact, akkor létezik olyan a H halmaz minden helyén folytonos operatio, mely nemcsak a H halmazon, de már az F részhalmazon sem egyenletesen folytonos. Minthogy ugyanis az F halmaz nem compact, azért foglaltatik benne olyan $\{f_n\}$ végtelen sorozat, melynek egyetlen részsorozata sem összetartó. A sorozat minden elemével csak véges számú eleme lehet azonos; végtelen sok azonos elem ugyanis összetartó részsorozatot alkotna. Ha tehát az egy-egy elemmel azonos többi elemet elhagyjuk, még mindig végtelen sorozatunk marad, úgy hogy eleve föltehetjük, hogy az $\{f_n\}$ sorozatban nincs két azonos elem. Minthogy továbbá F önmagában sűrű, azért minden f_n -hez van olyan ugyancsak F -be tartozó f'_n elem, melyre nézve

$$[f'_n, f_n] < \frac{1}{n}.$$

Azt is föltehetjük, hogy f'_n az $\{f_n\}$ sorozat egyetlen elemével sem azonos; ugyanis a sorozat többi elemének egy határozott f_n elemtől való távolságai egy pozitív korlát fölött fekszenek, mert ha nem, akkor volna sorozatunkban az f_n elem felé tartó részsorozat. Minthogy továbbá

² M. FRÉCHET: *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, t. XXII. (2^e sem. 1906), p. 1—74; *Les ensembles abstraits et le calcul fonctionnel*, u. o., t. XXX (2^e sem. 1910), p. 1—26.

$$[f_m, f_n] \leq [f'_m, f'_n] + [f'_m, f_m] + [f'_n, f_n] < [f'_m, f'_n] + \frac{1}{m} + \frac{1}{n},$$

azért az $\{f'_n\}$ sorozat sem tartalmazhat összetartó részsorozatot.

Értelmezzük az O_f operatiót a következő módon. Először is minden n -re

$$O_{f_n} = 1, \quad O_{f'_n} = 0;$$

ugyancsak $O_f = 1$, illetőleg 0 minden olyan f elemre, mely valamelyik f_n , illetőleg f'_n elemmel azonos. Minden más f elemre

$$O_f = (1 + \varrho^2)^{-\frac{1}{\varrho\varrho'}},$$

a hol ϱ az $[f, f_n]$, ϱ' pedig az $[f, f'_n]$ távolságok alsó határa. A ϱ , illetőleg ϱ' értékek az f elemhez rendelve egy-egy a H halmazon mindenütt folytonos operatiót értelmeznek, mert

$$|\varrho(f) - \varrho(f^*)| \leq [f, f^*],$$

és ugyanúgy

$$|\varrho'(f) - \varrho'(f^*)| \leq [f, f^*];$$

folytonos tehát az O_f operatio is, legalább is minden olyan f helyen, melyre $\varrho\varrho' \neq 0$, vagyis a mely az f_n, f'_n elemek közül egyikkel sem azonos. Ha továbbá f valamely f_n felé tart, akkor $\varrho \rightarrow 0$ és így

$$(1 + \varrho^2)^{\frac{1}{\varrho}} \rightarrow 1,$$

míg másrészt ϱ' egy 0-tól különböző határérték felé tart; ennél fogva

$$O_f = (1 + \varrho^2)^{-\frac{1}{\varrho\varrho'}} \rightarrow 1 = O_{f_n}.$$

Viszont ha $f \rightarrow f'_n$, akkor ϱ tart 0-tól különböző határérték felé és így

$$(1 + \varrho^2)^{-\frac{1}{\varrho}}$$

határértéke valódi tört; másrészt $\varrho' \rightarrow 0$, azaz $\frac{1}{\varrho'} \rightarrow \infty$; tehát

$$O_f = (1 + \varrho^2)^{-\frac{1}{\varrho\varrho'}} \rightarrow 0 = O_{f'_n}.$$

Az O_f operatio ennél fogva az f_n és f'_n helyeken is, vagyis a H halmazon *mindenütt folytonos*. Mindazonáltal az operatio az F halmazon *nem egyenletesen folytonos*; mert ámbár

$$[f'_n, f_n] < \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

mégis

$$O_{f'_n} - O_{f_n} \rightarrow 1.$$

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1918 június 10.-én tartott üléséből.)

ADULÁR A HAZAI ANDEZITEK ÉRCZTELÉREIBEN:

MAURITZ BÉLA 1. tagtól.

Az orthoklasznak adulár nevű fajtája hazánkban nem valami gyakori ásvány. A kristályos palákban alig néhány helyen sikerült e fajtát megtalálni. Így a Zoodt-folyó vidékéről (Ruszaduluj környékén, Szeben vm.) említi ACKNER;¹ az adulár itt «granitsyenit» teléreiben és azonkívül a folyó görgetegeiben található. MÁRTONFI LAJOS a szilágy-somlyói Magurán² kristályos pala üregeiben ismerte fel; ugyanő írja le az adulár macskamezői³ előfordulását, a hol az ásvány a Kecskéshegy gneiszában terem.

Sokkal érdekesebb azonban az adulár szerepe a hazai andezites kőzetek érczteléreiben. Az ilyenfajta előfordulások számát egygyel gyarapíthatom. A hazai andezites kőzetek érczteléreiből eddig a következő adulár-termőhelyeket találjuk az irodalomban felemlítve: A selmeczbányai előfordulást WIESER⁴ már 1852-ben felsorolja; BISCHOF⁵ az idevaló adulárt meg is elemezte. Ide kell soroznunk az oraviczabányai termőhelyet is, melyet TSCHERMAK⁶ ismertetett.

¹ ACKNER: Mineralogie Siebenbürgens. Hermannstadt, 1855. 20. l.

² MÁRTONFI LAJOS: Az adulárnak egy új előfordulása a szilágy-somlyói Magurán. Erdélyi Múzeumegylet, Orvos-természettud. Értesítő. Kolozsvár, 1888. XIII. 101.

³ MÁRTONFI LAJOS: Adatok az erdélyi medencze ásványföldtani ismeretéhez. Erdélyi Múzeumegylet. Orvos-természettud. Értesítő. 1892. XVII. 349.

⁴ Neues Jahrbuch f. Min. Geol. Pal. 1850. 429.

⁵ U. ott 1850. 46.

⁶ TSCHERMAK: Der Alloklas und der sogenannte Glaukodot von Oravicza. Sitzungsberichte Akademie Wien. Math. Naturwiss. Classe, 53. köt. I. 220.

Meglehetősen gyakori az adulár a felsőbányakörnyéki andezites érczetelésekben, a hol a levesbányai wolframit társaságából KRENNER¹ írja le. HOFMANN KÁROLY² a Vihorlát-Gutin keleti részén Máramaros megyében Tótos környékén (Zserapa) «ortoklasz-trachyt» hasadékaiban fentülő kristálykák alakjában találta.

Legelterjedtebb az adulár az erdélyi Érczhegység andeziteinek érczeteléseiben. A verespataki előfordulást SZABÓ³ és KOCH⁴ behatóbban ismertetik; Karácsról BENKŐ GÁBOR⁵ említi az adulárt, Botesbányáról a hessit társaságában BECKE⁶ emlékezik meg róla. A szomszédos bucsumi Arámabányában pedig 1911 őszén én gyűjtöttem egy nagy ércztömböt, mely gazdagon tartalmazza az adulárt.

A bucsumi Arámabánya geológiai viszonyait behatóan tárgyalja PAPP KÁROLY⁷ és PÁLFI MÓRICZ.⁸ A Napoleon-altáró föteléréből került elő az az ércztömb, a melynek ásványai a következők: galenit nagy szemcséjű tömegekben vaskos sphalerittel elegyedve; vaskos és kristályosodott pyrit (rostos pentagon-dodekaéderek), kevés chalkopyrit, a repedések falán vastagabb kvarcztűk, a melyeken fentülve, mint utolsó termék ismerhető fel az adulár.

Imitt-amott még ifjabb az adulárnál egy második kvarczgeneratio, a mely rendkívül finom tűkből áll. Az adulár tejfehér, jégkülsejű, 1—2 mm átmérőjű kristálykákban terem, többnyire a repedések és fészkek falait borító kvarcztűkre telepedett.

¹ KRENNER JÓZSEF: A felsőbányai trachyt wolframitja. M. Tud. Akadémia. Érték. a Term. Tud. köréből. 1876.

² HOFMANN KÁROLY: Ásványtani közlemények Vihorlát-Gutin trachyt hegységének keleti részéből. Földtani Közlöny 1872. 71.

³ SZABÓ JÓZSEF: Adatok Magyar- és Erdélyország határhegysége trachytképleteinek ismeretéhez. Földtani Közlöny 1874. 210.

⁴ KOCH ANTAL: Ásvány- és közettani közlemények Erdélyből. Érték. a Term. Tud. köréből. M. Tud. Akadémia VIII.

⁵ BENKŐ GÁBOR: Ásványtani közlemények az Erdélyi Érczhegységből. Erdélyi Múzeumegylet. Orvos-Term. Tud. Értesítő. XXII. 1888. 198.

⁶ F. BECKE: Ueber den Hessit von Botes in Siebenbürgen. Tschermak's Min.-petr. Mittheilungen III. 301.

⁷ Bány. Koh. Lapok XLI.

⁸ Földtani Int. Évkönyv. XVIII. 453.

Kristályai igen egyszerűek: a prizma és véglap határolják, úgy hogy teljesen romboéderekes habitusuk van. A prizmalapok homályosak, míg a véglap fényes, azonban vízszintesen erősen rostozott.

Az ércztömb, melyben az adulár termett, kaolinszerűen mállott és helyenként kvarczosodott andezitből való.

Valószínűnek tartom, hogy az adulár az andeziteknek még számos hazai ércztelérében is megtalálható lesz; az igénytelen külsejű ásvány könnyen érthetőleg nem részesült kellő figyelemben.

A kaliumszilikátos oldatoknak a hazai andezitek érczteléreiben való szereplésével KRUSCH, VOGT és BEYSCHLAG¹ behatóbban foglalkozott. Az adulár kizárólag csakis erősebben elváltozott, «propylitesedett» kőzetben fordul elő és joggal feltehető, hogy anyaga a mellékkőzet kilugozásából származik.

¹ Die Lagerstätten der nutzbaren Mineralien und Gesteine. Stuttgart. 1912. II. kötet, 31. l.

TERMÉSRÉZ ÉS KRISTÁLYODOTT HEMATIT GÖMÖR VÁRMEGYÉBŐL.

ZIMÁNYI KÁROLY I. tagtól.

(Két szövegábrával.)

Mintegy két-három év előtt Nandráson, a HEINZELMANN-bányatársulat pátvaskőbányaiban, a «Remény» altárnában egy 10—15 cm vastag telért ütöttek meg. A telérkitöltés főrésze fehér *kvarcz*, ezen kívül *limonit*, *pyrit* és *chalkopyrit*, az üregekben az említett ásványok mellett *réz*, *cuprit* és *baryt* található.

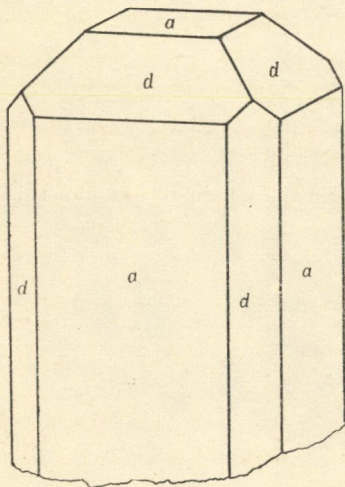
A réz az üregek és hasadékok falaira telepedett 1—3 mm méretű, többnyire eltorzult kristálykák, vagy ágas-bogas kristályhalmazok alakjában, a vaskos kvarczra pedig vékony lemezekben. A kristályok majdnem mind fénytelenek, homályos oxydatiós réteggel bevontak, csak egyes lapok simábbak és gyöngfényűek. A megfigyelt alakok:

$a \{100\}$, $d \{110\}$, $o \{111\}$

A kristályok nem ritkán üregek. A hexaëderes combinatiók:

a , d ; a , d , o ; némelyek a hexaëder-él szerint elnyúltak, rövid oszloposak (1. ábra).

A *cuprit*nek 0.5—1 mm nagyságú, fényes oktaéderei a



1. ábra.

fehér táblás baryt kíséretében, sokszor a réznek közvetlen szomszédságában, azzal összenőve is találhatók; néhol a cuprit a rezet körülfogva, erre telepedett.

Az előfordulás körülményei és a kísérő ásványok is arra engednek következtetni, hogy a réz és a cuprit itt is a chalkopyrit oxydálásának és az így keletkezett réz-sulphat későbbi redukálásának terménye, mint azt már régebben KNOP A.¹ és WIBEL F.² megfigyeléseikkel és kísérleteikkel is bebizonyították.

A híres és bányászatilag is oly jelentékeny termésréz a Lake Superior vidékén Észak-Amerikában R. PUMPELLY³ és VAN HISE⁴ szerint ugyancsak vasoxydul-vegyületek redukáló hatása folytán keletkezett.

A másik termésréz-előfordulás a Rimamurány-Salgótarjáni részvény-társaság vasérczbányaiból való, a Rozsnyó, illetőleg Sajóháza fölött fekvő «Elek»-táróból. A réz a limoniton mint vékony pikkelyes-lemezes bevonat, vagy az üregek falain apró, alig $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{8}$ mm nagyságú, rosszul kifejtett kristálykáknak ágasbogas, mohaszerű csoportjai alakjában található.

Mind a két előfordulás nagyon gyér és bányászati tekintetben jelentéktelen, de mineralogiailag annyiban is érdekes, mivel Gömör vármegyéből az irodalomban eddig csak Dobsináról említenek természetet, a Szepes-Gömöri Érczhegységből pedig Szomolnokról, Szepesremetéről és a már távolabb eső Rudnokról (Abauj-Torna vm.).⁵

*

Licze gömörmegyei község határában a Somtető dombjain a HEINZELMANN-féle bányatársulat vörösvaskövet termel. A tömör

¹ Neues Jahrb. für Miner. etc. 1861. 539—558. l.

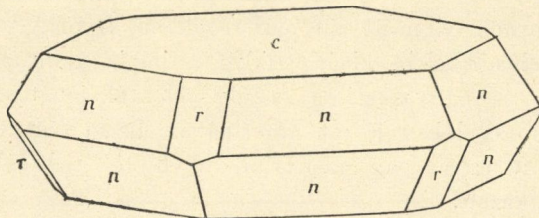
² Das gediegen Kupfer und das Rothkupfererz. Hamburg, 1864.

³ R. PUMPELLY: The Paragenesis and Derivation of Copper and its Associates on Lake Superior. Americ. Journ of Sc. 1871 (3). pag. 188.

⁴ C. 'B. v. HISE: Some Principles controlling the Deposition of Ores. Transact. Americ. Instit. Min. Eng. 1900. Febr. pag. 72. — Vsd ö. még I. F. KEMP: Ore Deposits of the United States and Canada. New-York. 1900. 3-d edition. pag. 209—211.

⁵ V. ö. ZEPHAROVICH: Mineralog. Lexicon. Wien, 1859. 1. 229. l.

vagy laza vasércz triaskorú mészkőbe telepedett; a fémfényű hematit helyenkint erekben és kisebb fészkekben fordul elő. A kristályok vagy a hematit üregeiben képződtek, vagy pedig egy porhanyós, laza, nagyon tisztátalan limonitba nőttek. A kristályokon mindössze $c\{0001\}$, $n\{22\bar{4}3\}$ és $r\{10\bar{1}1\}$ alakok



2. ábra.

ismerhetők fel; habitusuk szerint legnagyobb részük táblás (2. ábra), ritkábban pyramisosak, vagy rhomboëderesek. A lapok fénye nem tökéletes, azonkívül $r\{10\bar{1}1\}$ szerint benőtt vékony ikerlemezekről származó rostozás is látható rajtuk. A mérések eredményei az alábbiak:

	Mérés:	Számítás: ¹
$c:r = (0001) : (10\bar{1}1) = 57^\circ 28'$		$57^\circ 37'$
$:n = : (22\bar{4}3) = 61\ 14$		61 13
$n':n = (22\bar{4}3) : (4\bar{2}23) = 51\ 54$		51 59

¹ v. KORSCHAROW alapértékeiből.

ÚJ MÓDSZER A SZILÁRD ANYAG HATÁRÁN FEL- LÉPŐ FELÜLETI FESZÜLTSG VIZSGÁLATÁRA.

TANGL KÁROLY I. tagtól.

Bevezetés.

1. Két előző értekezésemben ¹ olyan módszert ismertettem, melylyel meg lehetett határozni, mennyivel változik meg a felületi feszültség a szilárd anyag határfelületén, ha levegőből vízbe jut. A módszer lényege abban állott, hogy lemértem a szilárd test deformációját, melyet a felületi feszültség megváltozása okozott. A mérendő deformatio egy hengeres cső sugarának, illetőleg belső köbtartalmának ezzel járó megváltozása volt. Hogy a deformatio elég nagy legyen: a cső anyagának nyújtási modulusának igen kicsinynek kellett lennie; csak a kaucsuknak van ilyen rendű modulusa, ezért a módszer közvetlenül csak a kaucsuk felületi feszültségének vizsgálatára volt alkalmas. Más anyagokét, köztük a fémekét csak úgy tudtam vizsgálni, hogy kaucsuk-csövet az illető anyag vékony rétegével vontam be. Így mértem paraffinnal és platinával. A kaucsuk-csövet platinával kathodorlasztás útján vontam be. Öt csővel végzett mérés a platina és víz közös érintkező felületén fellépő feszültség jól egyező értékeit adta; további méréseimből azonban kitűnt, hogy másfajta kaucsuk-csöveket véve s azokat ugyanúgy beplatinázva, a felületi feszültség nagy mértékben különböző értékeit adták. E nagy eltéréseket annak tulajdonítom, hogy mikor a kaucsuk a kathodsugarak hatása alatt platinával bevonódik, valami

¹ Math. és Természettud. Ért. XXVIII. 101—142. l. 1910 és XXXI. 755—787. l. 1913.

chemiai folyamat indul meg a platina és kaucsuk s a környező gáz között, úgy hogy a cső nem vonódik be tiszta platinával. E mellett szól az is, hogy a különböző platinázott csövek még éppen észrevehető különbségeket mutattak színárnyalatban. A módszernek ezenfelül az a nagy hátránya volt, hogy a kaucsuk észrevehetően nyel el vizet s az azzal járó térfogatváltozás nagyobb, mint az, melyet a felületi feszültség hoz létre; ezenkívül a felületi feszültség értékét extrapolációval kellett számítani. Ezért új módszerrel folytattam vizsgálataimat; az eddig elért eredményekről szól jelen dolgozatom.

A módszer ismertetése.

2. E módszer alapgondolata ugyanaz mint az előbbenié: lemérni azt a deformatiót, melyet a felületi feszültség változása hoz létre, csak másfajta deformatiót választottam. A vizsgálandó anyagból gondoljunk egy vékony szalagot. Ha a szalag levegőből vízbe jut, a felületi feszültség megváltozása folytán megváltoznak a méretei, tehát a hossza és szélessége is. Legyen f_l a levegővel, f_v a vízzel érintkező szalag felületi feszültsége, akkor $F = f_v - f_l$ a vízbe merülő szalag felületi feszültségének változása. A szalag vastagsága legyen δ , szélessége s ; δ legyen oly kicsiny, hogy keresztmetszetének területét $2s$ -nek vehetjük. Vízbemerüléskor a keresztmetszet egész területére működő összes feszítő erőnek megváltozása $2Fs$ lesz. Ha a lemez elég vékony, ez ugyanakkora megnyulást hoz majd létre, mintha bármely keresztmetszetére egy olyan p feszítő erő működne, melyre áll

$$p = 2Fs(1 - \mu), \quad (1)$$

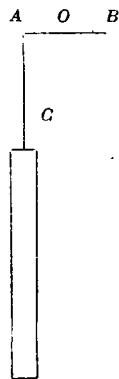
hol μ a harántösszehúzódnak viszonya a megnyuláshoz. Az $1 - \mu$ szorzó a miatt lép fel, mert F a szalagot minden irányban, tehát hosszára merőleges irányban is feszíti, p ellenben csak a hosszirányban.

3. Méréseimet aluminium-szalagokkal végeztem; ezt a fémet választottam, mert a háború miatt ebből a fémből tudtam csak kellő vékonyságú lemezt beszerezni. Hogy a fenti deformatio még mérhető legyen, a szalagnak igen vékonynak kell lennie;

hogy a várható deformatio nagyságrendjéről tájékozódjunk, gondoljunk egy aluminium szalagot, melyre nézve $\delta=0.001$ mm, $s=2$ mm, s hossza $L=50$ mm. Tegyük $F=7.5 \frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ (a víz felületi feszültsége). Akkor levegőből vízbe jutva a szalag annyit nyúlik meg (1) szerint, mintha megterhelése 20 mg-mal változott volna meg (F legyen positiv az esetben, ha az érintkező felületet nagyobbítani törekszik). Mivel az aluminium nyújtási modulusa $=7000 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$, a 20 mg megterhelés 7.10^{-5} mm megnyúlást okoz. Ámbár e megnyúlás igen kicsiny, mégis érdemesnek látszott a deformatio leméréseivel foglalkozni.

4. Olyan kísérleti berendezést használtam, melylyel közvetlenül nem a szalag megnyúlását, hanem azt a p megterhelést lehetett lemérni, mely ugyanakkora megnyúlást hoz létre, mint F ; a megnyúlás ismeretére tehát (1) alapján nem is volt szükség. Közelfekvő gondolat a következő berendezés. A szalag (1. ábra) alsó végét rögzítjük; felső végéről vékony drót vezessen egy rövid, merev AO karhoz, mely az O -ban lévő vízszintes, a rajz síkjára merőleges tengely körül foroghat; az AO kar folytatása az OB merev rúd, melynek végén levő súly a szalagot a kellő módon feszíti. Ha a szalag teljesen víz alá merül, a felületi feszültség változása miatt megváltozik a hossza, az AB merev test elforog, a mi tükör és skála segítségével jól mérhető. A kísérletek azt mutatták, hogy a szalag, vízbe jutva, megnyúlt, úgy hogy C -ben egy bizonyos p súlyt kellett elhelyezni, hogy az AB test elforgását megszüntessük, tehát visszavigyük eredeti állásába; ez a p súly lesz nyilván az a megterhelés, mely ugyanakkora megnyúlást hoz létre mint F , az teendő tehát az (1) formulába, feltéve, hogy a vízbe merülő szalag megnyúlását csakis a felületi feszültség megváltozásának tulajdoníthatjuk (l. 8., 9. és 12. p.).

Az AB merev testnek — a lengőnek — a 3. ábrán természetes nagyságban látható alakot adtam. E egy aczélp prizma,



1. ábra.

mely alsó élével egy sík üveglapra feküdt s a forgástengelyt szolgáltatatta; a D drót úgy volt a lengőhöz erősítve, hogy geometriai tengelye az él meghosszabbításában feküdt, úgy hogy lengés közben a D drót saját tengelye körül végzett forgó mozgást. Az alul rögzített s aluminium szalag (2. ábra) alsó és felső vége TT ezüst lemezekébe volt becsipve. A felső T lemeztől egy vékony platina drót vezetett a D dróthoz, melyhez hozzá volt forrasztva; lengés közben ez a platina drót D -re fel-, illetőleg róla lecsavarodott.

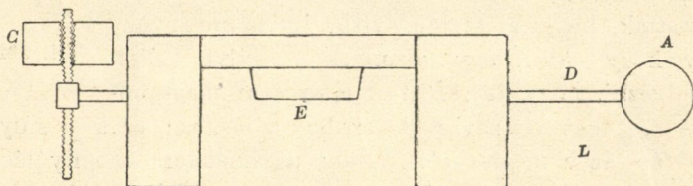
Keressük mekkora szöggel forog el a lengő, ha a felső T lemezkére p túlsúlyt rakunk. D sugara legyen r ; K (2. ábra) legyen a lengő súlypontja, ennek távolsága a forgástengelytől S . A lengő egyensúlyi helyzetében bizonyos P erővel feszíti a platina fonalat, melyre nézve áll:

$$Pr = mg S \sin \varphi, \quad (2)$$

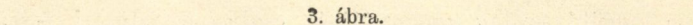
hol m a lengő tömege. Ugyanez az erő feszíti a s szalagot is, ha a T lemez súlyát egyszerűség kedvéért elhanyagoljuk (mert e súly nem lényeges).

Ha a T lemezre rárakjuk a p súlyt, a lengő elforog egy bizonyos $d\varphi$ szöggel, új egyensúlyi helyzetet vesz fel, melyben P is más lesz; dP legyen P változása, akkor

$$mg S \cos \varphi d\varphi = r \cdot dP. \quad (3)$$



2. ábra.



3. ábra.

A lengő elforgása folytán a szalag felső vége mélyebbre jut, a szalag megrövidül, feszültsége megváltozik; változik a platina drót feszültsége is. Jelölje L a szalag hosszát p rátevése előtt,

L' a platina szál ama darabjának hosszát, mely p rátevése előtt a T lemeztől a D dróting ért, jelölje dL a szalag, dL' a platina szál hosszváltozását, akkor:

$$dP = \frac{Eq}{L} dL + p = \frac{E'q'}{L'} dL' \quad (4)$$

hol E , illetőleg E' a szalag, illetőleg a fonál nyújtási modulusa, q , illetőleg q' a keresztmetszetek. dL és dL' nem függetlenek egymástól. Ugyanis a lengő elforgásával megváltozott a távolság T -től a D dróting: p rátevése előtt L' volt; azután L' megnyúlt dL' -vel, azonkívül egy $rd\varphi$ hosszúságú darab lecsavarodott, úgy hogy most a távolság T -től a D dróting $= L' + dL' + rd\varphi$; a távolság megváltozása tehát $dL' + rd\varphi$; ennyivel rövidült meg a szalag, úgy hogy a két hosszváltozás egymással való összefüggése:

$$-dL = dL' + rd\varphi. \quad (5)$$

A (4)- és (5)-ből

$$dL' = \frac{p - \frac{Eqr}{L} d\varphi}{\frac{Eq}{L} + \frac{Eq'}{L'}};$$

továbbá

$$dP = \frac{E'q'}{L'} \cdot \frac{p - \frac{Eqr}{L} d\varphi}{\frac{Eq}{L} + \frac{Eq'}{L'}}.$$

Ezt (3) téve kapjuk:

$$\frac{d\varphi}{p} = \frac{r}{\left(1 + \frac{EqL}{E'q'L'}\right) \text{mg } S \cos \varphi + \frac{Eq r^2}{L}}. \quad (6)$$

5. A mint (6)-ból látható, $\frac{d\varphi}{p}$ — az érzékenység — nagy mértékben fokozható, ha φ 90° -nál nagyobb, vagyis ha a lengő súlypontja a forgástengely fölé kerül. Akkor (6)-ban a nevező első tagja negatív lesz s ha a méreteket úgy választjuk, hogy $\left(1 + \frac{EqL}{E'q'L'}\right) \text{mg } S < \frac{Eq}{L} r^2$, akkor lesz φ -nek olyan értéke, hogy a nevező zérussá válik, az érzékenység végtelen nagy, a

lengő labilis lesz. A méretek megválasztását egy irányban korlátozza az, hogy a szalagra meg a platina fonálra működő feszítő erő 1) szerint $\frac{mgS}{r} \sin \varphi$ egy bizonyos értéknél nagyobb nem lehet, különben a szalag vagy a fonál elszakad.

Ha $\varphi = 180^\circ$, a lengő labilis lesz még akkor is, ha 6)-ban a nevező pozitív, mert akkor a szalagra és a fonálra ható feszítő erő 1) alapján zérus lesz: sem a szalag, sem a fonál, nem feszülvén meg, nem marad egyenes s így 6) érvénytelen lesz, mert a lengő elfordulásakor hajlítási deformációk is fellépnek.

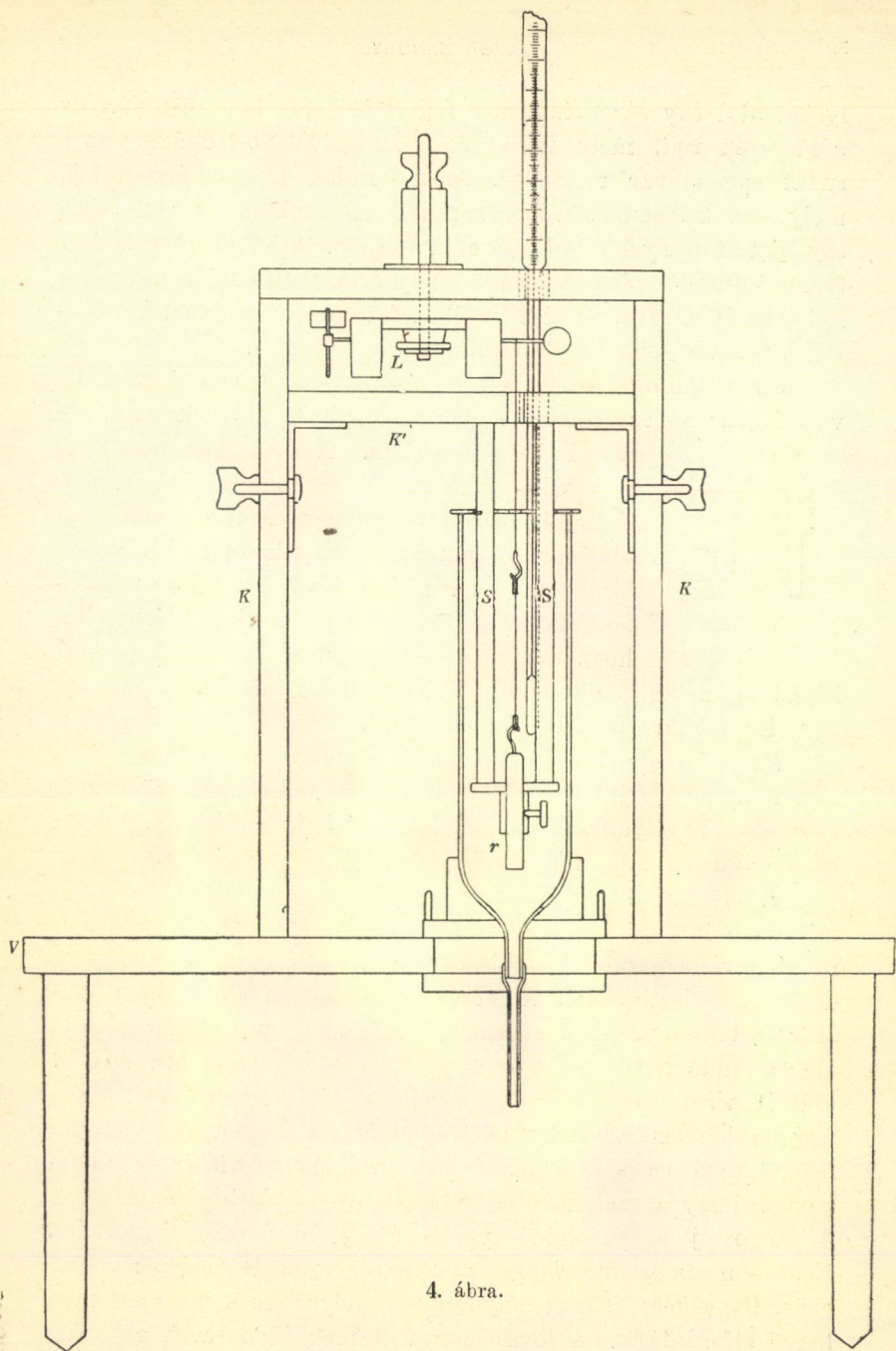
A mérés úgy történt, hogy a víz a szalagot teljesen ellepte s a víz szintje a platinafonalat érte. Ezért vékony 0.018 mm vastag platina szálat használtam, a melynek kerületére ható ama kapillaris erő, melyet a víz szabad felszíne gyakorol, mindössze 0.4 mg súlylyal egyenlő; ez pedig elhanyagolható volt.

A lengő kellő érzékenységének beállítása a csavarra járó c súly segítségével történt (3. ábra), melylyel a súlypont távolságát lehetett változtatni; az elforgást az A tükörrel (3. ábra) és skálával mértem. A lengő súlya kereken 57 gr. volt; 1) sugara $r = 0.05$ cm. A használt érzékenység akkora volt, hogy 467 mg súly a szalag felső végén a lengőt átlag 10 skálarésszel forgatta el, 2 mm-re beosztott skálát használva 250 cm skálátávolsággal. Ez az érzékenység nem nagy, azonban az első mérésekre elegendőnek bizonyult. Az érzékenység különben jelentékenyen fokozható. A P feszítő erő kereken 5 gr. súlylyal volt egyenlő, mely természetesen változott, ha a lengő elforgott. S értéke vastagabb szalagokra nagyobb volt, mint vékonyabbakra, átlag 0.2 mm rendű.

A készülék leírása.

6. Az egész eszköz berendezését a 4. ábra mutatja.

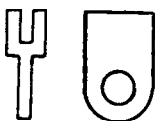
A három lábon álló V vaslaphoz a vasléczekből összerakott K keret volt erősítve. A keret felső rúdja hordta a kerek vaslemezhez erősített kis üveglemezt L -et, melyre a lengő élével ráfeküdt; az L lemezt az ábrán látható csavar segítségével fel és le lehetett mozgatni. A kerethez erősített K' keresztlécz tartotta az SS két párhuzamos, 6 mm vastag sárgarézrudat, me-



4. ábra.

lyeket alul egy sárgaréz lemez fogott össze, e lemezben járt az r sárgaréz rúd, mely felső végén kampóval volt ellátva; az r rudat egy csavar rögzítette. Az SS rudak üveg pohárba értek, mely alsó kivezető csövéhez kapcsolt kaucsukcső közvetítésével egy víztartánynyal állott összeköttetésben. A lengő D rúdjaához forrasztottam a platina drótot, mely a K' keresztléc megfelelő nyílásán áthaladva, az alsó végéhez forrasztott kampó segítségével a megvizsgálandó aluminiumszalagot hordta.

Az aluminiumszalag két végén egy-egy ezüst lemezkébe volt fogva; az ezüstlemezke alakja előlről és oldalról az 5. ábrán látható nagyítva. A lemezke vastagabb vége villa alakú volt; a két szára közé ékeltem csillámlemezze a szalagot. A felső lemezke a platina dróthoz forrasztott kampón lógott, az alsó pedig az r rúdon lévő kampóba kapaszkodott. Az L üveglemezt emelve elérhettem,



5. ábra.

hogy a szalag kellően kifeszült minden ráncz-képződés nélkül, mindenütt egyforma feszültséggel. A pohárba egy tizedfokokra osztott hőmérő nyúlt.

Az egész eszközt gyors hőmérsékletváltozások ellen a vaslapon nyugvó cinkpléhvel bélelt fabura védte, mely fölé még egy második ugyancsak cinkpléhvel bélelt fabura került. A bura alatt chlorcalciumot helyeztem el, a levegő szárítására.

7. Mérés előtt az eszköz legalább egy órát elkészítve állott, miután előbb száraz levegőáramot vittem át rajta. A poharat s minden vízbemerülő alkatrészt natronlúggal és alkohollal gondosan megtisztítottam. A mérés maga abban állott, hogy először észleltem a lengő egyensúlyi helyzetét, míg a hőmérséklet elég állandó lett és az egyensúlyi helyzet alig változott. Azután alulról vizet engedtem a pohárba; a víz hőmérsékletét előre úgy szabályoztam, hogy lehető egyforma legyen a pohárban lévő levegő és szalag hőmérsékletével. Annyi víz jutott a pohárba, hogy a szalagot teljesen ellepve a platinafonalat érje. A lengő új egyensúlyi helyzetét átlag 40 perczig jegyeztem. Ezután megmértem a lengő érzékenységet megterhelésre: a felső ezüst lemezkére ismert súlyú lovast helyeztem s megmértem a lengő elfordulását. A lovas úgy volt megválasztva, hogy közel

ugyanakkora kitérést adott mint a vízbemerülés. A lovas rátevésekor a szalag vízben állott, tehát a lovas is teljesen vízbemerült; súlyvesztését számbavettem. A pohárba lépő víz hőmérséklete legföljebb néhány század fokkal tért el a szalag eredeti hőmérsékletétől.

A szalag vízbemerülése 6–15 skálarésznyi elforgást okozott 250 cm távolságra felállított 2 mm-re beosztott skálával. Az elforgás iránya mindig olyan volt, mint a milyen a szalag megnyúlásának felel meg: a felületi feszültség változása tehát a szalagot nyújtani, az érintkező felületet nagyobbitani akarja. Az észlelt megnyúlás átlag 200–400 mg megterhelésnek felel meg; ezt a súlyt a szalag felső végén lévő ezüst lemezkére rakva, a lengő visszatér eredeti egyensúlyi helyzetébe.

F számítása.

8. A lengő elforgása nem csupán a felületi feszültség változásának következménye. Magára a szalagra ható hidrosztatikai felhajtó erő is ad elforgást, ez a felhajtó erő azonban 1 mg-nál kisebb, azért elhanyagolható volt.

Számításba kellett azonban venni a szalagot tartó felső ezüstlemez és horog súlyvesztését, mely 19 mg-ra rúgott. Ennek megfelelően korrigáltam az elforgás, illetőleg p észlelt értékeit.

Vízbemerüléskor felhajtó erő működik az SS rudakra is, melyek alsó összetartó lemezéhez volt erősítve a szalag alsó vége. E felhajtó erő a rudakat összenyomja, azok megrövidülnek, alsó végük s ezzel a szalag alsó vége is felfelé elmozdul és a lengő elforog. A szalag alsó végének emiatti elmozdulása, λ , természetesen független a szalag méreteitől. Hogy a lengő elforgását megszüntessük, felső végére olyan p_1 súlyt kell raknunk, mely a felső véget visszaviszi eredeti helyére; ezzel a szalag λ -val rövidebb lett s közvetlenül látható, hogy

$$p_1 = E \frac{s\delta}{L} \lambda = C \frac{s\delta}{L};$$

ez az érték levonandó a vízbemerüléskor észlelt p értékből.

C értékét úgy határoztam meg, hogy az SS rudak alsó

keresztlemezére 23.4 gr-t akasztottam és észleltem a lengő hozzátartozó elforgását; vízbemerüléskor az SS rudak és az alsó lemez súlyvesztése 7.12 gr. A 23.4 ugyanakkora elforgást hozott létre mint a szalag felső végére helyezett 0.100 gr, amikor $s = 3.81$ mm, $S = 0.00437$ mm és $L = 40.4$ mm volt. Ebből $C = 7.38 \cdot 10^4$.

9. Ha a fenti correctiókkal ellátott p értékeket p_0 -val jelöljük, a felületi feszültség változását F -et a

$$p_0 = 2Fs(1-\mu)$$

egyenletből számíthatjuk, feltéve, hogy csak F okoz most már megnyúlást. Lehetséges azonban, hogy a szalag egész tömegében vizet nyel el, a minek folytán minden mérete, tehát hossza is megváltozik. Ugyanezt a hosszváltozást létrehozhatjuk azzal, hogy a szalag végén az egész keresztmetszetére működő p' feszítő erőt alkalmazunk. Nyilván

$$p_0 = 2Fs(1-\mu) + p'.$$

Hogy F mérhető legyen, tudnunk kell, van-e vízabsorptio s mekkora a p' ; ennek ismeretéhez a következő megfontolás vezet: Ha az aluminium szalag vizet nyel el s ez okoz valami megnyúlást, akkor ez a megnyúlás független a szalag keresztmértéitől, s -től és δ -tól; a p' megterhelés, mely ugyanezt a megnyúlást hozza létre, arányos s -sel és δ -val, azaz $p' = Bs\delta$. Írhatjuk tehát

$$p_0 = 2Fs(1-\mu) + Bs\delta;$$

és innen

$$\frac{p_0}{2s(1-\mu)} = F + \frac{B}{2(1-\mu)}\delta = F + A\delta. \quad 7)$$

Ebből látható, ha van vízelnyelés s ez okoz térfogatváltozást, akkor az úgy jelentkezik majd, hogy $\frac{p_0}{2s(1-\mu)}$ függ a szalag vastagságától, még pedig linearisan. A vízelnyelés hatását úgy tudhatjuk tehát meg, hogy különböző vastagságú szalagokkal végezzünk méréseket. Ha $\frac{p_0}{2s(1-\mu)}$ észlelt értékei mint δ lineáris függvényei jelentkeznek, akkor ennek állandó tagja szolgáltatja F -et, δ szorzója pedig a vízelnyelés okozta térfogatváltozást.

10. Hogy a mérések valóban az alumíniumra jellemző adathoz vezessenek, szükséges volt, hogy a vizsgált szalagok felületének minősége jól definiált s mindig egyforma legyen. Ismeretes, hogy a folyadékok felületi feszültségét kis szennyezés mennyire befolyásolja: hasonló befolyás várható a szilárd anyag határfelületi feszültségére nézve is. Fokozta a nehézséget az, hogy az előbbi pont fejtegetései alapján különböző vastagságú s egyforma felületi minőségű szalagokat kellett készíteni. Következőképpen jártam el: A kereskedésben kapható s tisztának jelzett 0.01 mm vastagságú alumínium lapból 2—4 mm széles szalagokat vágtam, a melyeket nátronlúgba, majd alkoholba mártott vattával jól ledörzsöltem; a kellő hosszúságú szalagot az ezüstlemezkekbe befogtam; a csillám a szalagot az ezüستől izolálta. Az így elkészített szalagot híg nátronlúgba akasztottam, mely a szalagot hydrogenfejlődés közben oldotta s benne hagytam addig, míg vastagsága körülbelül a felére apadt.

A vastagság meghatározása mérlegeléssel történt, az alumínium sűrűségét 2.7-nek véve. Egy Nemetz-féle kémiai mikromérleget használtam, melylyel $1/200$ miligrammot jól lehetett még lemérni. A lúgból kikerült szalagot destillált vízzel jól leöblítettem s körülbelül 12 óráig destillált vízben áztattam. Ezzel a szalaggal végeztem egy mérési sorozatot. Ezután a szalagot nátronlúggal tovább vékonyítottam s újra mértem vele s i. t. A vékonyítást kereken 0.002 mm-ig tudtam vinni; ekkor már apró lyukak jelentkeztek a szalagon.

Ez eljárást mint első próbát tekintettem; teljesen kielégítő eredményre nem vezetett, mert kaptam szalagot, melyen a lúggal kezelés után apró fehér, vízben oldhatatlan foltok mutatkoztak, melyeket az alumínium apró szennyezéseinek tulajdoníthattam, mivel azok az alumíniumot átjárták, a szalag mindkét oldalán egymással szemben jelentkeztek. Csak olyan szalaggal mértem, melyen vagy semmi, vagy csak igen kevés apró folt mutatkozott. E fehér foltoktól eltekintve, a felületen szemmel látható változás nem lépett fel.

A felület természetesen nem volt tükröző; a felület érdesége lúgozás után mikroszkop alatt sem mutatott változást. Ezt azért emelem ki, mert felmerülhet az a kérdés, vajjon a lúggal

étetés folytán nem nagyobbodik-e meg a felület az által, hogy érdessége megnagyobbodik? Ez együtt járna p_0 megnagyobbodásával s miután F számításában s mindig ugyanazzal az értékkel szerepelt, egyúttal F látszólagos megnövekedését okozná. Az előbbieket alapján ez nem várható. Különben is p_0 értéke a vékonyodással kisebbedett, tehát ellenkező irányban változott, mint a fenti hatásnak megfelelne.

11. Gondot fordítottam arra, hogy a szalag mérésakor sík legyen s rajta semmiféle törés, ráncz ne mutakozzék. A lúggal kezelés előtt a szalagot gondosan tisztított csillámlemezek közé présbe helyeztem. Az ilyen szalag az eszközbe téve sík marad, ha a kellő nagyságú erő feszíti s semmi törés sincs rajta. A kellő feszítő erőt a lengő adja meg a 2) formula szerint. Ha a szalagon törés van vagy a feszítő erő nem elég nagy, az a mérésekben is jelentkezik. Ha a szalag nem sík s vízbe merül, a felületi feszültség változása azt nem iparkodik kiegyenesíteni, az csak olyan alakváltozást fog létesíteni, mely felület-változással jár, csak nyújtani fogja. A p súly azonban ki is egyenesíti, tehát nyújtja és hajlítja a szalagot. Ezért a p súlyra, mely a lengőnek ugyanazt az elforgását adja mint F , nem áll többé, hogy $p=2sF(1-\mu)$, hanem $p<2sF(1-\mu)$. Ha tehát a lemez nem sík, F számított értéke nő a mint a szalagot feszítő P erő növekedik, mert a szalag mind jobban kiegyenesedik. Csakugyan egy mérési sorozatban a különben változatlan szalagra ható összes feszítő erőt változtattam 0.3 gr.-ról 3 gr.-ig; a vízbemerüléskor az elforgás nagyobbodott és p értéke 32 mg.-ról 207-re emelkedett; kezdetben rohamosan, azután lassabban, a mint a szalag jobban kifeszült; 2.5 gr. feszítő erőből kezdve állandó lett. Az ismertetendő mérésekben a szalagot feszítő erő 5 gr. körül volt; külön is meggyőződtem, hogy akkor p értéke már független a feszítő erőből.

12. Vízbemerüléskor a szalag hőmérséklete egy-két század-fokkal megváltozott; mekkora elforgást okoz ez? Számba veendő, hogy vízbe merül az SS rudak nagy része is. A hőfok-változás befolyása kicsiny lesz, mert az SS tartó hosszváltozása ellenkező irányú elforgást okoz mint a szalagé meg a platinaszálé. Kereshetjük, mekkora az a p' súly, mely az ezüst lemezkére

rákva ugyanakkora elforgást okoz, mint a Δt hőmérséklet-változás. A számítás arra vezet, hogy

$$p' = \frac{Eq}{L}(\Delta S - \Delta L - \Delta L'),$$

hol ΔS az SS tartó, ΔL az aluminium szalag, $\Delta L'$ a platina szál hosszváltozása Δt miatt. p' kiszámításában úgy jártam el, hogy az SS vízbemerülő darabjának hőmérsékletét ugyanakkorának vettem, mint az aluminiumszalagét, azaz $t + \Delta t$ -nek; a vízből kiálló darabjának pedig és a platina szálnak középhőmérsékletét $t + \frac{1}{2}\Delta t$ -nek. Így számítva a megfelelő kiterjedési együtthatókkal azt kapjuk, hogy 0.01 hőmérséklet-változás, a legrosszabb esetben, mikor q nagy, akkora elforgást okoz, mint 2 mg megterhelés. Ezt a correctiót mindig alkalmaztam.

Mérési eredmények.

13. Nem lesz talán érdektelen, ha a mérés menetét egy példán bemutatom; álljon itt például az 58. sz. szalaggal 1917 május 24.-én végzett egyik mérés.

A szalagot mérés előtt a lengő apró eltolásával függélyesre állítottam. Az eszköz száraz levegőben állott 3 órán át. Az egyensúlyi helyzeteket közvetlenül leolvashattam, mert nem volt lengés. A következő állásokat olvastam le:

5h.	53 m.	146.9	$t=19.93^\circ$
	57 "	146.9	
6h.	0 "	146.9	$t=19.93^\circ$.

Ekkor vizet engedtem a pohárba. Két percz múlva a lengés megszűnt s a következő egyensúlyi helyzeteket olvastam le:

6h.	2 m.	138.2	$t=19.99$
	5 "	136.9	
	10 "	136.6	
	15 "	136.5	
	20 "	136.5	
	25 "	136.4	
	30 "	136.3	$t=19.93$.

A mint látható, vízbemerülés után az egyensúlyi helyzet erősen változik, 10 percz múlva azonban a járás sokkal kisebb és egyenletes.

Az elején észlelt erősebb járás részben a hőmérséklet-változásnak tulajdonítható, mely kezdetben gyorsan egyenlítődik ki; de tulajdonítható részben a víz absorptiójának is. A későbbi egyenletes járás, mely hosszú időn át megmarad, lassú hőmérséklet-változásnak volt tulajdonítható, ama tapasztalás alapján, hogy e járás némelykor az egyik, máskor ugyanazzal a szalaggal a másik irányban történt. A víz beocsátása a levegőt mozgásba hozza, ezzel apró hőmérséklet-különbségek léphetnek fel, amelyek lassú kiegyenlítődése okoz lassú egyenletes járást.

Ezt a járást az elforgás számításában tekintetbe vettem úgy, hogy kerestem, mekkora a vízbemerülés okozta elforgás, ha ez az egyenletes járás kezdettől fogva meg lett volna. Így számítva, az elforgás 10.15 skálarészt tesz ki. Ezután a szalag felső végén levő ²ezüst¹lemezke-re többször egymásután felraktam, illetőleg levettem 0.520 gr. súlyú lovast s a következőket észleltem:

Idő	A szalagon semmi	A szalagon 0.520 gr.	Külömbség
6 h 53 m.	133.2		15.2
55		148.4	15.2
57	133.2		15.2
59		148.4	15.1
7 h 1 m.	133.3		15.1
3		148.4	15.1
5	133.3		
Középkülömbség			15.15

A .C csavarral a lengőt emelve, az egyensúlyi helyzetet megváltoztattam s újra reáraktam, illetőleg levettem 0,520 gr.-ot. A következőket észleltem:

Idő	A szalagon semmi	A szalagon 0.520 gr.	Külömbség
6 h 35 m	137.6		15.6
37		153.2	14.8
39	138.4		15.8
41		154.2	15.2
43	139.0		15.5
45		154.5	15.4
47	139.1		15.5
49		154.6	15.1
51	139.5		
			Középkülömbség 15.4

Ez észlelésekből látható, hogy az érzékenység változik a lengő állásával, összhangzásban a 6) formulával. A két érzékenységből egyszerű interpolációval számítható, hogy a vízbemerülés előtti egyensúlyi helyzetből, az 146,9-ből az 520 mg 15,2 skálárésznyi elforgást adott volna.

Ez adatokból $p=305$ mg; számba véve, hogy a 520 mgr. vízben került a szalagra, tehát a súlyveszteségét vízben tekintetbe véve csak 457 mg jutott a szalagra; a correctiók alkalmazásával $p_0=272$ és $\frac{p_0}{2s(1-\mu)} = 56$, ha a $\mu=0.33$ értékkel számítunk. (E szalagra vonatkozó adatok: $s=3.63$ mm, $\delta=0.0023$ mm, $L=40.0$ mm.)

A következő táblázat az 58. sz. szalaggal végzett összes mérések eredményét tartalmazza, melyből meglátható, hogy az egy ugyanazzal a szalaggal végzett mérések mekkora ingadozásokat mutatnak s indokolja, hogy bizonyos correctiókat elhanyagoltam. E táblázatban a betűk jelentése a következő: ε az elforgás vízbemerüléskor skálárészekben kifejezve, E az elforgás, melyet 520 mg rárakott lovas adott, ez a lovas is vízben lévén, 457 mg megterhelésnek felel meg; p az a megterhelés, mely ugyanakkora elforgást ad mint a vízbemerülés, tehát ε -t. Ezt a p értéket korrigálni kellett: a szalagot tartó ezüst lemez súlyveszteségével (19 mg), a SS tartóra gyakorolt felhajtó erő miatt

δ	ε	E	A	Δt	p_0	$\frac{p_0}{2s (1-\mu)}$
0.0058	6.5	6.7	386	+ 0.07	313	64
	7.4	8.55	342	— 0.01	286	59
	6.35	8.15	356	+ 0.03	291	60
	7.5	8.35	410	+ 0.01	350	72
	6.45	7.25	497	+ 0.02	345	71
	6.75	7.4	417	+ 0.07	344	71
közéértékek : + 0.03					321	66
0.0042	8.55	11.1	352	+ 0.02	302	62
	9.05	11.35	365	+ 0.05	310	64
	8.55	11.2	349	— 0.04	308	63
	8.55	10.3	380	+ 0.01	331	68
	8.75	11.1	360	+ 0.01	311	64
	9.35	10.45	374	— 0.02	330	68
	8.4	12.0	320	+ 0.05	265	54
	8.1	10.6	349	+ 0.05	294	60
közéértékek : + 0.02					308	63
0.0032	9.9	14.35	316	+ 0.05	270	54
	11.4	18.5	281	0.00	241	50
	9.9	14.55	311	+ 0.01	270	56
	11.1	14.7	345	— 0.10	315	65
	11.05	15.35	329	— 0.00	289	59
	10.75	14.55	337	— 0.01	298	60
	12.65	16.0	361	+ 0.05	327	67
	11.7	15.6	343	+ 0.04	298	60
közéértékek : — 0.01					289	59
0.0023	11.0	16.35	308	— 0.10	282	58
	10.9	16.0	311	— 0.06	282	58
	9.1	15.2	273	+ 0.06	234	48
	10.15	15.2	305	— 0.01	272	56
	9.7	14.6	304	+ 0.04	266	55
	9.45	14.6	296	— 0.02	264	54
	9.1	15.3	272	0.00	238	49
közéértékek : + 0.01					263	54

s a hőmérséklet változás miatt (l. 8. és 11. pont); az így korrigált p értéket p_0 jelöli; Δt a vízbemerüléskor észlelt hőmérséklet-változás.

14. E mérési sorozatból látható, hogy $\frac{p_0}{2s(1-\mu)}$ határozottan kisebbedik, ha a vastagság fogy. Az előbbiek alapján ennek kell bekövetkeznie, ha az aluminium vizet nyel el s ez térfogatnagybodással jár. Minthogy $\frac{p_0}{2s(1-\mu)}$ csökkenésének más okát megadni nem tudom, a víz elnyelésének kell azt tulajdonítanom.

A középértékeket a következő táblázatba foglalhatjuk:

δ	$\frac{p_0}{2s(1-\mu)}$
0.0058	66
0.0042	63
0.0032	59
0.0023	54.

Ezeket az értékeket a legkisebb négyzetek módszerével számított következő formulába foglalhatjuk össze:

$$\frac{p_0}{2s(1-\mu)} = 47 + 0.34 \times 10^4 \delta,$$

mely az észlelt értékeket a következő módon állítja elő:

δ	számított $\frac{p_0}{2s(1-\mu)}$	észlelt $\frac{p_0}{2s(1-\mu)}$
0.0058	67	67
0.0042	62	63
0.0032	58	59
0.0023	55	54.

A 7) formula szerint $F = 47 \cdot \frac{\text{mg}}{\text{mm}}$.

15. Az 58. sz. szalagon kívül még 5 szalaggal végeztem hasonló méréseket. Az eredményeket a következő táblázatba foglaltam; abban A jelenti a 7) formulában δ együtthatóját, s a szalag szélességét, δ_1 a legnagyobb, δ_2 a legkisebb vastagságot.

Szalag sorszám	F	A	s	δ_1	δ_2
58	47	$0,34 \cdot 10^4$	3.63	0.0058	0.0023
59	34	$1,16 \cdot 10^4$	2.13	0.0045	0.0025
60	37	$0,43 \cdot 10^4$	3.52	0.0045	0.0031
61	40	$1,14 \cdot 10^4$	3.30	0.0056	0.0022
63	34	$0,44 \cdot 10^4$	3.73	0.0051	0.0035
66	43	$0,42 \cdot 10^4$	2.32	0.0071	0.0021.

A 62, 64, 65 szalagok mérés közben elszakadtak. A különböző szalagok F értéke közt elég nagy különbség mutatkozik, a mit főképpen annak tulajdonítok, hogy, ámbár valamennyi szalagot egyformán kezeltem, felületük mégsem lett egészen egyforma (l. 10. pont). Tanulságos volt e szempontból a 60. sz. szalag; mikor e szalag 0.0031 mm vastagságú lett, alig észrevehető egy-két folt mutatkozott, $\frac{p_0}{2s(1-\mu)}$ értéke ekkor 58 volt; mikor 0.0023 mm-re vékonyítottam, több, jól észrevehető nagyobb folt fejlődött és $\frac{p_0}{2s(1-\mu)}$ értéke 68-ra szökkent; az utóbbi értéket F számításában nem használtam fel, mert felület-minősége szemmel láthatóan megváltozott. Még tanulságosabb volt a 63. szalag; a 0.0037 mm-re vékonyított szalag alsó vége felé sok folt mutatkozott, $\frac{p_0}{2s(1-\mu)} = 73$ volt; a foltos darabot levágtam s újra mértem; $\frac{p_0}{2s(1-\mu)}$ 53-ra esett. Hogy a szalag pusztta megrövidítése nem okozta e változást, arra bizonyíték a 61. szalag, mely mérés közben elszakadt, a megmaradt felényi hosszú darabbal $\frac{p_0}{2s(1-\mu)}$ ugyanazt az értékét kaptam, mint előbb.

0.002 mm-nél vékonyabb szalaggal nem mértem, mert akkor a szalagon már sok apró lyuk jelentkezett, a mikor a $p=2Fs(1-\mu)$ összefüggés már nem alkalmazható elég jó megközelítéssel.

A különböző szalagok A értékében még nagyobb különbségek vannak, a mi A értelmezése alapján a mellett szól, hogy a szalagok nem voltak eléggé egyforma anyagi minőségűek.

Összefoglalás.

16. A leírt méréseket tájékoztató méréseknek tekintem, melyeknek célja nem annyira az volt, hogy a felületi feszültség változásának lehető pontos értékére vezessenek, hanem inkább az, hogy a módszer hasznavehetőségéről felvilágosítást és egyúttal útmutatást adjanak arról, milyen irányban lehet és kell az eljárást tökéletesíteni. F nagyságrendjéről az eddigi mérések is igen jó eredményt adnak: a hat szalagon végzett mérések közép értéke $F = 39 \frac{\text{mg}}{\text{mm}}$; a legnagyobb eltérés e középértéktől annak 20%-a. Pontosabb érték várható első sorban, ha jobban definiált s egyformább felületeket állítunk elő, továbbá, ha sikerül még vékonyabb szalagokkal dolgozni, mert ezzel csökken a vízelnyelés hatása. Természetesen növelhető még az érzékenység is. Kísérleteimet a fenn kijelölt irányban folytatom.

Az eddigi eredményeket röviden a következőkben foglalhatom össze:

1. Új módszert ismertettem, melylyel le lehetett mérni, mennyit változik a szilárd anyag felületi feszültsége, ha vízből levegőbe jut.

2. Natronlúggal kezelt alumíniumon a felületi feszültség vízben $39 \frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ -rel nagyobb, mint levegőben. E változás a vízzel érintkező alumínium felületét nagyobbítani törekszik.

3. A natronlúggal kezelt alumínium-szalag vizet nyel el, a mi térfogat-nagyobbodást okoz.

A BÁNI-HEGYSÉG BAZALTSZERŰ KÖZETEI.

MAURITZ BÉLA 1. tagtól.

A bán-battinai (Baranya-vármegye) bazaltszerű kőzetekről legelőször SZABÓ JÓZSEF¹ emlékezik meg. Legújabban LÓCZY LAJOS² foglalkozik e kőzetek geológiai viszonyaival.

Az 1913. évben dr. VADÁSZ ELEMÉR kereste fel e helyeket és a gyűjtött anyagból több darabot rendelkezésemre bocsátott. Mivel e példányok több tekintetben figyelemre méltók, nem lesz érdektelen róluk itt néhány szóval megemlékezni.

VADÁSZ megfigyelései szerint ezek a bazaltszerű kőzetek a felső mediterrán-korú agyag-márga üledékeket áttörik; eruptiójuk minden valószínűség szerint a felső mediterrán vége felé történhetett. Ifj. LÓCZY LAJOS a (bodolyai) mediterrán-homokkőben és a báni lajtamészkőben találta őket zárvány gyanánt.

A báni teléreket földalatti, táróyszerű kőbányákban fejtik. A kőzet már makroskopice is eltér az igazi típusos bazaltoktól: a sötét tömött alapanyagból töménytelen apró, 0·1—1·0 mm átmérőjű földpát villog elő. Egyéb makroszkopos elegyrészt nem lehet felismerni.

A mikroszkop alatt a következőket látjuk. A makroporphyros földpáttáblák labradorok; meghatározásukra a törési együttható (körülbelül 1·560) és a szimmetrikus kioltás, mely $+35^{\circ}$ -ot tesz ki, szolgált. Gyakran nem élesen automorphok, hanem részben le-

¹ Magyarhoni Földtani Társulat Munkálatai. III. kötet 133—141. o. 1867.

² Földtani Közöny. 42. kötet, 672. oldal. 1912.

gömbölyödöttek. Számos albit-ikerből vannak felépítve, de előfordul a karlsbadi és periklin-ikertörvény is. Belsejükben csaknem mindig bőséges salakos üvegzárványt tartalmaznak; e tekintetben tehát megint az andezitekre emlékeztetnek. Mindössze két makroporphyros augitot lehetett a mikroszkop alatt felismerni. Az alapanyag elegyrészei: földpát-táblák, augitszemek és olivin-kristályok, továbbá ezeknek mállási termékei, végül érczek és apatit.

Az alapanyag földpáttáblái szintén a labradorsorba tartoznak; általában élesen automorphok és üvegzárványokat nem tartalmaznak. A pyroxenek mind monoklin augitok; mikroszkop alatt csaknem színtelenül átlátszók. Optikai tulajdonságaik (kioltás 39° körül, tengelyszög 60° körül) a diopsidszerű augitra vallanak.

Ezek az augitok igen ritkán automorphok; többnyire csak alaktalan szemek vagy pedig az ofitok módjára földpáttáblákkal vannak átnöve. Ez az ofitos szövet megint bazaltos jellemvonás. A rombos pyroxenek teljesen hiányoznak. Az olivinszemecskék meglehetősen el vannak szerpentinesedve, mennyiségük meg lehetős tekintélyes.

Az érczek közül a magnetit és ilmenit van képviselve; az előbbi egyes nagyobb szemeket alkot és nem valami nagy bőségben van jelen. Ez tehát megint inkább andezites jellegre vall. Az ilmenit hol nagyobb lemezekben, hol pedig végtelen apró, barnán átlátszó pikkelykében (titánvas-csillám) fordul elő. A kis apatitpálczikák igen szórványosak. Világosbarna, mikrolitoktól hemzseggő üveget csak igen elvétve látunk a földpátlécek közé ékelve.

A kőzet már nincs valami friss állapotban, hanem szerpentinrel és másodlagosan keletkezett vasérczekkel erősen át van járva. Úgy a szövet, mint az ásványos összetétel részben bazaltos, részben andezites jellemvonásokat tüntet fel. Ugyanezt látjuk a kémiai összetétel tekintetében is. A kőzet kémiai elemzése a következő eredményt adta:

	súly-%	molecula-%
SiO_2 — — — — —	54.24	60.28
TiO_2 — — — — —	1.26	1.05
Al_2O_3 — — — — —	18.13	11.85
Fe_2O_3 — — — — —	2.69	—
FeO — — — — —	4.24	6.16
MnO — — — — —	nyomok	—
MgO — — — — —	4.95	8.25
CaO — — — — —	6.17	7.35
Na_2O — — — — —	3.88	4.18
K_2O — — — — —	1.24	0.88
P_2O_5 — — — — —	0.24	—
H_2O — — — — —	2.48	—
CO_2 — — — — —	nyomok	—
	99.52	100.00

Az OSANN-féle képlet

<i>s</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>F</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>f</i>	<i>n</i>	
60.28	5.06	6.79	14.97	3.8	5.1	11.1	8.25	Bán
61.23	5.13	6.88	14.75	4	5	11	8.4	Peel Island, Japán ¹
62.27	5.51	6.10	14.51	4.5	4.5	11	6.6	Puy de Pariou, Auvergne ²
61.95	4.34	7.38	14.53	3.5	5.5	11	8.9	Cascade Range, Oregon. ³

OSANN táblázatában a báni közet a legnagyobb rokonságot mutatja a Peel Islandról származó sanukittal, a mely tulajdonképpen hypersten-andezit; a bazaltok csoportjában a Puy de Pariou- és a Cascade Range-típusok szintén csaknem azonosak vele. Chemiai tekintetben a báni közet a legbasikusabb andezitek, illetőleg a legsavanyúbb bazaltok közé sorolható. Tekintettel arra a körülményre, hogy a kiömlésük a mediterrán kor végén történt, helyesebb az *andezit*, vagy *andezit-bazalt* nevet alkalmazni.

A báni közetnek különös érdekességet kölcsönöz az a körülmény, hogy sok mikroszkopi spinell- és sillimanit-zárványt

¹ TSCHERMAK's: Min.-petr. Mitteilungen XX. 441. 1901.

² U. ott XX. 450. 1901.

³ U. ott XX. 455. 1901.

tartalmaz, a melyek minden valószínűség szerint az áttört agyag-márgák beolvadása révén keletkeztek. A spinellek majd alakatlan szemek, majd pedig kissé legömbölyödött oktaéderek, a melyek zöld vagy barnás színnel átlátszók. A sillimanit mindig csak rostos szálas pamacsszerű halmazokat alkot. A két ásvány állandóan kíséri egymást. Ugyanebből a báni kőzetből egy olyan darab is került birtokomba, a melyben egy több cm-es tiszta kvarz-zárvány látható.

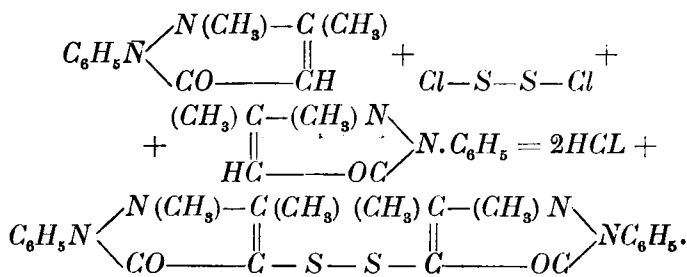
A kiskőszegi kőbányában eruptív-breccciát fejtenek. A darabok arról tanúskodnak, hogy a breccia igen változatos összetételű. Különösen figyelemreméltó az a breccia, a mely túlnyomórészt kőzetüvegből áll. A szurok- vagy üvegfényű darabkákat vastagabb kalciterek cementálják egybe. Az üvegből néhány nagyobb földpáttábla villog elő. Mikroszkop alatt az üvegben számos igen friss és éles földpátléczet látunk, a melyek többnyire villásan végződnek. Néhány nagyobb automorph olivinnek már csak a pseudomorphozóját (calcit) lehet felismerni. Augitot hiába keresünk. Az érczek is hiányzanak, legfeljebb rendkívül finom trichitek alakjában vannak képviselve. Maga az üveg teljesen friss, színe világos egyenletes barna. Ezt a breccciát nem lehet palagonitosnak nevezni; találóbb megjelölés, ha szurokkőbreccsiának nevezzük.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1918 április 22.-én tartott üléséből.)

ADATOK A THIACETECZETAETHER, AZ α -CHLORACETECZETAETHER ÉS AZ OXALSAV ISMERETÉHEZ.¹

KONEK FRIGYES-től.

Néhány évvel ezelőtt, ugyancsak e helyen közöltem a kén-tartalmú természetes alkaloidok synthesisére vonatkozó kísérleti tapasztalataimat.² Elsősorban a kén chloridjainak, valamint a thiophosgennek a china- és az opiumalkaloidokra való hatását tanulmányoztam, a nélkül azonban, hogy sikerült volna állandó összetételű és így physiologiailag is értékes kéntartalmú termékekhez jutnom. Kiterjesztettem azért vizsgálataimat akkor még a mesterséges alkaloidokra — és ezek között a KNORR-féle antipyrinre — is és sikerült kénchloriddal, illetőleg chlorürrel, két szépen kristályosodó új, kéntartalmú származékot: a mono-, illetőleg dithiobisantipyrint előállítanom, melyek sima lefolyású reactióban csaknem quantitativ eredménynyel keletkeznek:



Feltűnt nekem már akkor, hogy míg az antipyrin mole-

¹ A budapesti tud. egyetem III. sz. vegytani intézetéből.

² Math. és Természettud. Ért. XXV. kötet (1907) 363. l.

culájának mozgékony, más gyökök által könnyen helyettesíthető hydrogenatomja kénchlorürrel szemben is rendesen viselkedik és egyöntetű reactio-termékhez vezet, melyben a kettős kéncomplexum még megvan: addig az antipyrin anyavegyületének, az acetyleczezaethernek ugyanaz a hydrogenatomja kénchlorürrel szemben azt az anomaliát mutatja, hogy nem a várandó dithio-, hanem csak a monothioacetyleczezaether keletkezik.¹ E rendellenes reactio teljes irodalmának áttanulmányozása után, szükségesnek tartottam, hogy BUCHKA-nak² erre vonatkozó kísérleteit megismételjem, illetőleg meggyőződjem állításának helyeségéről, hogy tudniillik acetyleczezaetherből és kénchlorürből — egy atom kénnek leválása közben — mindig csak a monothio-származék keletkezik.

E célból tiszta (HÖCHST) aceteczetestert (két molekulát) és KAHLBAUM-féle friss készítésű kénchlorürt (egy molekulát) chloroformos higitásban olyformán elegyítettem, hogy ez utóbbit óvatosan cseppentettem hozzá a 0°-ra lehűtött és kétannyi chloroformmal felhígított esterhez. A kavaróul használt hőmérő csak gyenge hőemelkedést jelez és sósavgáz is csak a reactio vége felé távozik el. Az egyesítés befejeztével kapott sárgásszínű oldatból a chloroformot lapos csészékben elillanni hagyjuk s ekkor már erős buborékokban távozik a reactio folyamán keletkezett sósav. Nemsokára hosszú tüalakú, fehér kristályok jelennek meg, melyek az oldószer elpárolgása után sárgásfehér, szilárd tömeget alkotnak, a mely sárgás, a változatlan aceteczetester szagát erősen mutató olajos testbe van beágyazva. A kristályokat leszűrjük és forró borszeszben oldjuk; a lehülés-kor finom, concentrikusan csoportosult hófehér tüalakú jegeczeteket kapunk, a melyek 89—90°-on olvadnak. Az anyalúgokból is csak ezt a terméket nyerjük. Ha aceteczetestert kénchlorürrel minden higitás nélkül hagyunk egymásra hatni, a reactio olyan heves lesz, hogy az ester forrni kezd és a sósav gyorsan egyszerre távozik; a maradék lehülve megszilárdul és forró

¹ Ber. d. deutsch. Chem. Ges. XVIII. 2092.; XX. 2000.; XXII. 306. és 2541.; XXIII. 559. — Ann. CCLIII. 197.

² L. c.

borszeszből jegeczítve, ugyanazokat a selyemfényű, hosszú fehér tűalakú kristályokat adja, mint a higitott componensek. A kristályokat megelemeztam, illetőleg meghatároztam jellegzetes alkotó részüket, a kén — natriumsuperoxyd-eljárásommal — a következő eredménnyel:

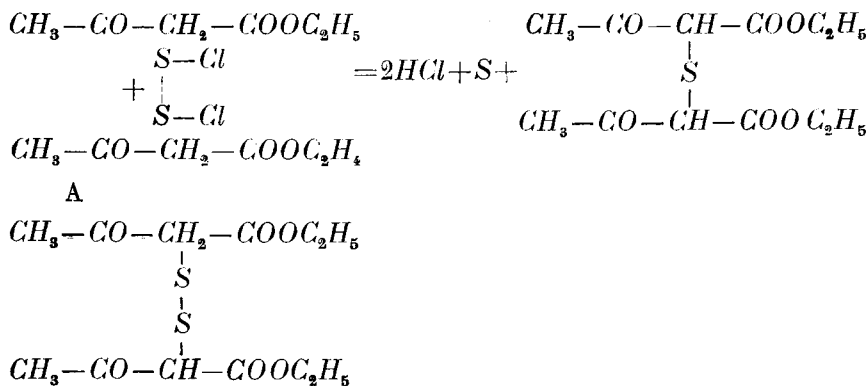
1. 0·1205 gr anyag adott Na_2O_2 -dal elégetve 0·0965 gr $BaSO_4$ -ot;

2. 0·1472 gr anyag adott Na_2O_2 -dal elégetve 0·1173 gr $BaSO_4$ -ot.

Kén (talált érték) 11·04% (I); 11·00% (II).

A monothiohisaceteczetesterben, $C_{12}H_{18}O_6S$ -ben a kén számított értéke 11·03%. Míg a dithiovegyületben: $C_{12}H_{18}O_6S_2$ -ben a kén számított értéke 19·87%.

Ezek az elemzési eredmények minden kétséget kizárnak. Mivel továbbá a gondosan tisztított termék összes tulajdonságaiban is, úgy mint olvadáspontjában, oldhatósági viszonyaiban és a többiben teljesen megegyezik BUCHKA vegyületével, helyesnek kell az általa először leírt reactionnak olyan értelemben való magyarázatát elfogadnunk, mely szerint kénchlorürből és aceteczetesterből nem a várható bi-, hanem egy atom kénnek a leválása közben csak a monosulfid keletkezik:



vegyületet pedig az eddig még elő nem állított, azaz imaginarius vegyületek közé kell soroznunk.

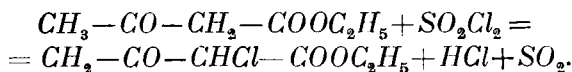
Egyedül csak az antipyrin-sorozatban elért positiv eredmény készítetett arra, hogy ennek daczára is tovább kutassak még e vegyület után. Elsősorban az α helyzetben, vagyis a

methylen-csoportban halogennel helyettesített acetyleczetester, az α -chloracetyleczetester keltette fel figyelmemet és tanulmány tárgyává tettem chlor-atomjának kén vagy selen által való helyettesítésének lehetőségét. Közelesőnek látszott ugyanis az a feltevés, hogy alkalmas, indifferens oldószerben, az α -chlorester halogenje a kénchlorürével egyetemben moleculáris ezüst, activ réz, vagy más ilyen célra használni szokott fémötvözet segítségével helyéből kimozdítható és a felszabaduló gyökök a várható dithioszármazékká egyesíthetők lesznek. A reactio gyakorlati kivitele, illetőleg kísérleti megvalósítása és a keresett és várható termékeknek tisztán való elkülönítése azonban ez ideig nem sikerült.

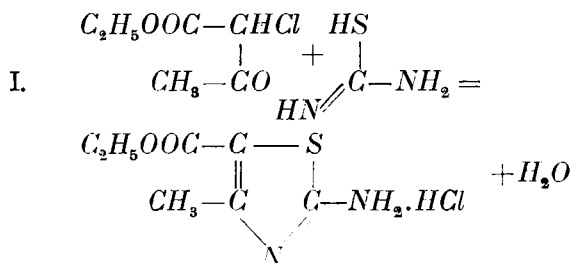
Az alkalipolysulfideknek — a melyek között lehet talán egy K_2S_3 összetételű is — az α -halogenaceticetesterekre való behatása sem kecsegtet ezek után sokkal több reménnyel, annyival kevésbbé, mivel ezek igen bomlékony anyagok és így a tiszta bisulfidnek elkülönítése a reactiótermékből leküzdhetetlen kísérleti nehézségekbe ütközik. Bár ezek a kísérletek eddig nem is vezettek a kívánt eredményre, azért még mindig nem tartom egészen bizonyosnak, hogy a dithioaceticetester csakugyan a nem létező, vagy az elő nem állítható vegyületek sorába tartozik és ezirányú kutatásaimat folytatni fogom. Egyelőre a kísérleteimhez használt α -chloracetyleczetesternek egy sajátos és önkényes átalakulásáról akarok itt még röviden beszámolni, melynek eddig a vegyület elég jelentékeny és 40 évre visszamenő irodalmában nem tudtam a nyomára akadni.¹ Az α -chloraceticet-estert vagy helyesebben az acetylchloreczetestert ALLIHN állította

¹ A chloraceticetester irodalma 1878-tól napjainkig: Allihn, Ber. 11. 568. és 12. 1298. — Mewes, Ann. 245. 59. — Schönbrodt, Ann. 253. 171. — Haller u. Held, Bull. d. l. soc. chim. 47. 889. — Conrad u. Guthzeit, Ber. 16. 1554. és 19. 21. — Buchka u. Sprague, Ber. 22. 2548. — Hantzsch, Ber. 25. 728. — Genvresse, Ber. 25. Ref. 204. — Hantzsch, Ber. 23. 2339. — Conrad u. Schmidt, Ber. 29. 1045. — Peratoner, Gaz. Chim. ital. 22. II. 40. — Epprecht, Ann. 278. 74. — Nef, Ann. 266. 52. — Pröpper, Ann. 222. 50. — Steude, Ann. 260. 27. és 261. 29. — James, Ann. 246. 61. — Willcox, Chem. Zentr. Bl. 1905. I. 13. Amer. Chem. Journ. 32. 446. — Schlottbeck, Ber. 42. 2565. — Alexandrow, Ber. 46. 1021. — Sachs, Chem. Zentr. Bl. 1914. I. 233. Monatsh. f. Chem. 34. 1409.

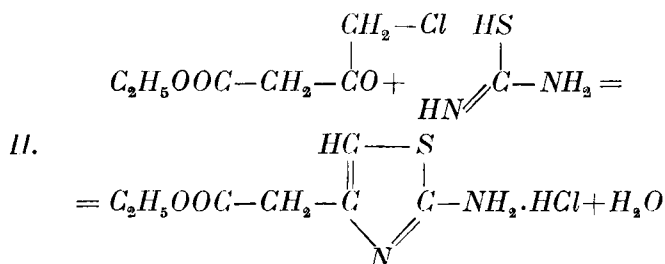
elő először aceteczetesterből és sulfurylchloridból, körülbelül 40 évvel ezelőtt. A savchlorid hatását helyesen értelmezvén, kimondotta, hogy a keletkezett chlorozott termékben a halogen a methylen-, nem pedig a methyl-csoportban foglal helyet; szóval egy α -, nem pedig egy γ -származék keletkezik, ez egyenlet szerint:



Később a vegyületet közvetlen chlorozás útján is próbálták készíteni; csak hogy ebben az esetben annak a lehetősége is megvan, hogy a halogen nemcsak a methylen, hanem a methyl-csoportba is beléphet, még pedig nem egyszer, hanem többször is, úgy hogy nemcsak α -, hanem γ -monochlor-, illetőleg di-, tri-, tetra- és pentachloraceteczetesterek, illetőleg azok keverékei is keletkezhetnek. A halogen-aceteczetesterekre vonatkozó ismereteink ilyformán csakhamar és teljesen összekuszálódtak. Végleg HANTZSCHNAK sikerült ezt a zavaros állapotot tisztáznia, a ki a thiohugyannyal való condensatióban olyan reactiót talált, melynek segítségével az α - élesen megkülönböztethető a γ -halogen-aceteczetestertől; mert míg amaz thiohugyannyal amidomethylthiazolcarbonsavestert, addig az utóbbi az isomer, lényegesen különböző, amidothiazylecettestert adja:



α -chloraceteczetester + thiohugyany = amidomethylthiazolcarbon-
(a ϕ - vagy iminalákban reagál) = savesterchlorhydrat.



γ -chloracetic ester + thiohugyany = amidothiazylester-chlorhydrat.

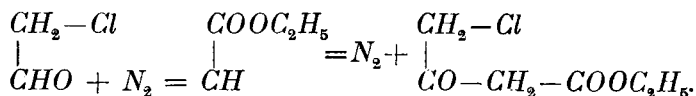
A két isomer thiazolszármazék annyira eltér olvadáspontjában — az első 175° -on, a második ellenben már 94° -on olvad —, hogy még keverékekben, azaz egymás mellett is könnyűszerrel és biztosan lehet őket kimutatni és azonosítani. Éppen e reactio alapján mondta ki HANTZSCH a ma is még érvényes tételt, hogy az acetic esterből akár közvetlen és részleges chlorozással, akár pedig sulfurilchloriddal, mindig csak ugyanaz a monochlor, az α -chloracetic ester keletkezik; más szóval, hogy a chlor mindig a methylensoportot keresi fel, míg ezzel szemben a bróm rendesen a methylsoportba lép be, γ -bromacetic estert keletkeztetve; a két halogen tehát az acetic esterrel szemben nem azonosan, hanem ellentétesen viselkedik. E tétel helyességét a legújabb irodalom is igazolja; WILLCOX¹ például acetic esterből és chloresulfonaethyl esterből: $\text{Cl}-\text{SO}_2-\text{OC}_2\text{H}_5$, kizárólag csak α -chlorestert kapott, mely ALLIHN-nak a sulfurilchlorid segítségével kapott termékével azonos volt. Ugyanarra az eredményre jutott SACHS² is, midőn phenyljodidchloriddal: $\text{C}_6\text{H}_5\text{ICl}_2$, chlorozta az acetic estert. Tiszta γ -ester SCHLOTTERBECK³ újabb vizsgálatai alapján substitutióval úgy látszik egyáltalán nem, hanem csak synthesis

¹ L. c.

² L. c.

³ L. c.

útján nyerhető, ha szerinte a chloracetaldehydet és a CURTIUS-féle diazoecetaethert hagyjuk egymásra hatni:



A tiszta γ -chloresternek az α -vegyülettől eltérően gyenge, gyümölcsre emlékeztető édeskés szaga van, míg ezé határozottan szúrós; és nagyon valószínű, hogy a közvetlen chlorozással nyert termékek az α - γ -isomérák keverékei voltak. Kísérleteimhez a berlini KAHLBAUM-gyár által szállított α -chloraceteczetestert használtam, a mely a gyár közlése szerint ALLIHN eredeti módszerével, tehát aceteczetesterből és sulfurylchloridból készült. A készítmény, melyet a chlornak kénnel vagy selennel való helyettesítésére nézve vizsgáltam körülbelül öt évvel ezelőtt, azóta is érintetlenül állott a rendes barnaszínű parafadugós 100 cm³-es üvegben, a világosság ellen védett helyen. Gyűjteményem átvizsgálásakor, az idei nyár folyamán véletlenül kezembe került a KAHLBAUM-féle α -chloraceteczetesternek ez a még félig telt üvegje is és legnagyobb csodálkozásomra az edény fenekén candis-cukorszerű, kemény kristályréteget vettem észre. Első gondolatom természetesen az volt, hogy egy lassú lefolyású, rendes chlor- vagy sósav-leválással járó acetylacetestercondensatioval, illetőleg annak várható rendes termékével: diacet-fumarsavesterral, illetőleg succiniloborostyánkősavesterral van dolgom. Ebben a feltevésben különittem el a kristályokat a barnavörös anyalúgtól és agyagon megszárítva őket, hófehér, üvegfényű prismás jegeceket kaptam, melyek a BEILSTEIN-féle minőségi próba végzésekor halogentől mentesnek bizonyultak. Könnyen oldódnak methyl- és æthylalkoholban, æther-ecetaetherben és acetonban; ellenben jóformán oldhatatlanok benzolban, benzinben, chloroformban és széntetrachloridban. Forró tömény eczetsav is jól oldja őket és lehüléskor gyémántfényű, lapos és tűalakú kristályok válnak ki az oldatból, melyeket leszűrve, benzollal kimosunk és levegőn teljesen megszárítunk. Ilyen alakban 103°—104°-on olvadnak szintelen olajjá, a mely 90°-ra lehülve, ismét megdermed. Vizben igen könnyen oldódnak; az

oldatnak kémhatása erősen savanyú és vaschloriddal jellemző színreactiót nem ad. Elemzésük a következő eredménnyel járt:

I. 0.1703 gr anyag adott 0.1676 gr CO_2 -t és 0.0421 gr H_2O -t; a miből C (talált) = 26.84% ; H (talált) = 2.75%.

Ha a légszáraz kristályokat vacuumban, tömény kénsav és káli felett szárítjuk hosszabb ideig, akkor olvadáspontjuk $187-189^\circ$ -ra emelkedik, az elemzés pedig valamivel kevesebb hydrogen ad.

II. 0.2494 gr anyag adott 0.2434 gr CO_2 -t és 0.0545 gr H_2O -t; a miből C (talált) = 26.62% ; H (talált) = 2.42%.

Ezekkel a jellegzetes — tudniillik feltűnően alacsony — szén- és hydrogen-százalékszámokkal jóformán el is dőlt már a vegyület mibenléte; ezek szerint ugyanis nem lehet más, mint «*kristályvíztől mentes oxalsav*», a melynek a $(\text{COOH})_2$ képletből folyó számított szén- és hydrogenértékei: $C = 26.66\%$; $H = 2.22\%$, — a talált számokkal feltűnően jól megegyeznek. Ezzel az eredménnyel azonban még nem értem be és az α -chloracetyleczetester-eredetű oxalsavat, a melyből mindössze csak néhány grammnyi mennyiség állott rendelkezésemre, még tovább is jellemeztem. A vegyület ammoniával közömbösített vizes oldatban, tiszta chlorcalciumoldattal az oxalsavra annyira jellemző oldhatatlan calciumoxalat-csapadékot létesíti. A savfok, illetőleg az alkáliság meghatározása végett 0.1063 gr száraz és tiszta anyagot előzetesen kiforralt vízben oldottam és az oldatot hidegen phenolphthalein-indikátor jelenlétében $\frac{n}{10}$ savra beállított, tizednormál kalilúggal megtráltam. A kísérletben elhasználtam 23.43 cm^3 tizednormalis KOH -t, míg a víztől mentes oxalsav, mint kétbasisú sav, a telítéshez 23.62 cm^3 tizednormalis KOH -t igényel. Legjellemzőbb az oxalsavra a kaliumpermanganat iránt tanúsított magatartása, mivel a chamaeleon ezt a bicarbonsavat kénsavas közegben simán két molecula széndi-oxiddá oxydálja, miközben maga reductio folytán elszintelenedik; úgy hogy ezt az éles színátmenetet régóta használjuk már a kaliumpermanganat-oldatok titerjének a megállapítására. A «permanganat szám» meghatározása végett 0.1307 gr tiszta anyagot 500 cm^3 vízben oldottam s az oldatból $100-100 \text{ cm}^3$ -t,

kénsavval megsavanyítva, $\frac{n}{100}$ -oxalsavra beállított $\frac{n}{100}$ chamaeleonnal forrón megtitrálva, 18·2 milligramm $KMnO_4$ -ot használtam el, a számított 18·3 milligramm helyett. Ezek után már nem lehet többé kétségünk az iránt, hogy az alphachloracetylecetesterből évek mulva magától levált kristályos anyag nem lehet más, csak oxalsav. A milyen egyszerű volt aránylag e termék minőségének megállapítása, éppen olyan bonyolult keletkezésének magyarázata, úgy hogy e tekintetben még csak feltevésekre vagyunk utalva. Az α -chloracetecetesternek körülbelül 40 évre visszanyúló, eléggé terjedős irodalmában egyetlen egy biztos adatot találtam arra nézve, hogy a vegyületből oxydatio által oxalsav is keletkezik. PRÖPPER¹ a lipcei egyetem laboratóriumában 34 évvel ezelőtt végzett egyik munkájában — a melyben a füstölő salétromsavnak acetecetesterre és az ALLIHN-féle α -chloesterre való hatását tanulmányozta — ez erélyes oxydatio termékei között az oximido-, illetőleg chloroximidoecetsav mellett oxalsavat is kapott, a melyet calcium-sója alakjában választott le és elemzett. Az oxalsavnak, mint a szénsav, vagyis minden oxydatio végső terméke utolsóelőtti fokozatának ilyen körülmények között való keletkezése könnyen érthető és nem is szorul bővebb magyarázatra. Ezzel szemben azonban egészen más az én esetem. Hogy mégis némi bepillantást szerezzek e végtelen lassú bomlási és oxydatiós folyamat mechanizmusába, a barnaszínű olajat a kristályokról leöntöttem és hasonló üvegben sötét helyen állni hagytam. A jellegzetes oxalsav-kristályok leválása csakhamar újból megindult, annak jeléül, hogy itt egy folytonos bomlási és oxydatiós folyamattal van dolgunk.

Fractionált destillálással nem akartam ez érdekes tünény további lefolyását megakasztani és így csak néhány minőségi kísérletre szorítkozhattam. A vöröses barna olaj, a mely a BEILSTEIN-próba végzésekor még erősen halogentartalmúnak bizonyult, vas-chloriddal sem vizes, sem borszeszes oldatban nem ad már ibolya színeződést. Annak megállapítása végett, hogy az

¹ L. c.

olajban van-e még el nem bomlott α -chloraceteczetester, HANTZSCH előírása szerint egy grammnyi mennyiséget borszeszes oldatban kondenzáltam az egy molekulának megfelelő tiszta thiocarbamiddel. Az alkohol elűzése után visszamaradó nyúlós, félszilárd sárgás színű anyagot — a thiazol sósavas sóját — vízben oldottam, a levált kénnyomokat szűrővel eltávolítottam és a szüredékben a szabad thiazolbázist ammoniával leválasztottam. A kezdetben újból leváló ként ismét leszűrtem, a szüredékből azután állás közben nemsokára fénylő méz-sárga kristályok kezdtek leválni. Ezeket másnap leszűrtem és vacuumban megszáritottam. Ez a nyers termék a FISCHER EMIL-készülékben a capillaris csőben a normalis hőmérő szerint $174-175^{\circ}$ -on olvadt meg barnás-fekete olajjá. Pontosan ez a hőfok az amidomethylthiazol-carbonsavesternek olvadáspontja is HANTZSCH szerint, mely vegyület tudvalevően az α -chloraceteczetesterből képződik. Az isomer γ -chloraceteczetesterből és thiocarbamidból keletkező és jóval alacsonyabban, már 94° -on olvadó amidothiazyleczetsav-ester e szerint tehát még nyomokban sem keletkezett; mert ha keletkezett volna, akkor minden bizonynyal jelentékenyen csökkentette volna az olvadáspontot. A magasabban olvadó thiazol keletkezéséből arra következtethetünk, hogy az α -chloraceteczetester még évek múlva sem alakul át — a chloratom vándorlása következtében, a hogy ezt azelőtt némely kutató tévesen hitte — az isomer γ -chloresterré. A keletkezett thiazol mennyisége azonban olyan csekély volt, hogy ebből a körülményből arra kell következtetnem, hogy már csak igen kevés el nem bomlott α -chloraceteczetester van jelen. Kísérleteimből végeredményben egyelőre két dolog állapítható meg egészen biztosan; először tudniillik az, hogy az α -chloraceteczetester nem állandó vegyület, hanem évek múlva hydrolysis és oxydatio folytán oxalsavra és más, közelebb meg nem határozható termékekre bomolhat, a nélkül azonban, hogy átmenetileg az isomer γ -chloresterré alakulna át.

Ilyen értelemben szorul helyesbítésre, illetőleg kiegészítésre a «Beilstein» I. pótkötetébe belekerült és a 238. lapon az α -chloraceteczetæthylesterről olvasható, CONRAD-SCHMIDT-féle (Ber. 29. 1045) adat is, mely szerint ez a vegyület állás közben hónapok múlva sem változik meg. Másodsorban pedig az α -chloracet-

eczetesterből keletkezett, kristályvítól mentes oxalsav elemzéséből és olvadáspontjának a meghatározásából kitűnt az, hogy az irodalomban¹ és a különböző tankönyvekben található, az oxalsav olvadáspontjára vonatkozó és egymástól sokszor eltérő adatok között BAMBERGER² adata látszik leghelyesebbnek, a ki az ő kristályvítól ment oxalsavját az α -tetrahydronaphtylaminnek permanganattal való oxydatiójakor, adipinsav mellett kapta; tisztaságát elemzéssel ellenőrizte és olvadáspontját — saját észlelésemmel megegyezően — szintén 189°-on levőnek találta.

A másodízben levált oxalsavkristályokat czélszerűnek véltem kristálytani szempontból is megvizsgáltatni. E czélből az olajat leöntve az edény fenekéhez tapadó kristályokról, benzollal többször leöblítettem és benzol alatt tartottam őket, hogy kristályvizet ne veszithessenek, illetőleg ne szívhassanak. Az ilyenformán conservált, tehát az eredeti leválás stádiumában levő jegeczek kristálytani vizsgálatát MAURITZ BÉLA kollegám az egyetem mineralogiai intézetében volt szíves végezni, a miért neki e helyen is köszönetet mondok. Az optikai viselkedésből sikerült megállapítania, hogy a kristályok a monoclin-rendszerbe tartoznak. Mivel az irodalom adatai szerint a kristályvítartalmú oxalsav jegeczedik ebben a rendszerben — míg a kristályvítmentes a rhombusosba tartozik —, ebből szükségképpen azt kell következtetnünk, hogy az α -chloraceteczetesterből a kristályvítartalmú, nem pedig a másik oxalsav válik le.

¹ HESS: Poggend. Ann. [2] 35. 419. — STAUB, SCHMIDT: Ber. 17. 2742. — LESCOEUR: Ann. chim. [6] 19. 58. — FISCHER: Ber. 27. Ref. 80. Proc. chem. Soc. 1892. 186.

² BAMBERGER: Ber. 21. 1901.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1917 deczember 10.-én meg nem tartott ülésére bejelentve, 1918 márczius 18.-i ülésén előterjesztve.)

A M. T. Akadémia Matematikai és Természettudományi Bizottsága kiadványai.

Mathematikai és Természettudományi Közlemények:

XXIX. kötet.

- 'Sigmund Elck. A könnyen átsajátítható phosphorsav jelentősége és meghatározása talajaink trágyaszükségletének megállapítása céljából, 1906 4.—
Lőrenthey Imre. Palaeontológiai tanulmányok a harmadkorú rákok köréből, 1907 2.—
Bernátsky Jenő. A hazai Asparagusfélék monographiája, 1907 3.—
Ifj. Entz Géza. A Tintinnidák szervezete, 1908 3.—

XXX. kötet.

- Gombocz Endre.** A Populusnem monographiája, 1908 6.—
Méhely Lajos. Prospalax priscus (NHRG), 1908 —,80
Péterfi Márton. Adatok a Bihar-hegység moha-flórájának ismeretéhez, 1908 1,50
Mauritz Béla. A Mátra-hegység eruptív kőzetei, 1909 2,40
Gáti Béla. Gyorsváltakozású gyenge áramok méréséről, 1909 —,60

XXXI. kötet.

- Szabó Zoltán.** A Knautia-genus monographiája, 1911 10.—
Bernátsky Jenő. A hazai Iris-félék, 1911 3.—

XXXII. kötet.

- Méhely Lajos.** Magyarország csíkos egerei, 1913 3.—
Daday Jenő. Magyarország kagylós levéllábú rákjai, 1913 4.—
Hollós László. Kecskemét vidékének gombái, 1913 4.—

XXXIII. kötet.

- Jungmayer Mihály.** Budapest és környékének szabadon élő evezőlábú rákjai, 1914 5.—
Szűcs Andor. A földigiliszta idegrendszerének finomabb szerkezete, 1915 5.—
Richter Aladár. A víztartó szövet s az élettani felemáslevelűség némely esete, 1916. 135 lap, 12 tábla rajzzal és négy táblázattal 10.—

XXXIV. kötet.

- Lendl Adolf.** A pókok izomrendszere. I. A tipikus izomrost szövettani szerkezete. 1917. 108 lap, kilencz kettős táblával és 33 szövegrajzzal 15.—

Külön kiadványok:

- Dr. Deési Daday Jenő.** A magyarországi kagylórakok magánrajza. Ostracoda Hungariae, 1900. IV és 320 lap, a szöveg közé nyomott 64 ábrával 6.—
Dr. Jancsó Miklós. Tanulmány a váltóláz parazitáiról, 1906. 279 lap, 14 táblával és számos rajzzal 12.—
Dr. Méhely Lajos. Species generis Spalax. A földi kutyák fajai származás- és rendszertani tekintetben. 1909. IV és 353 lap, 33 táblával és 19 szövegrajzzal 15.—
Dr. Gelei József. Tanulmányok a Dendrocoelum lacteum Oerstd. szövet-tanáról. 1912. 289 lap, 16 táblával és 19 szövegrajzzal 10.—
Dr. Gorka Sándor. Anatomiai és élettani adatok a bogarak Malpighi-edényei működésének megítéléséhez. 1913. 147 lap, 7 képtáblával 4.—
Dr. Méhely Lajos. Fibrinae Hungariae. Magyarország harmad- és negyedkori gyökerefogú poczkai, különös tekintettel a fajformálódás tényezőire és időszakaira. 1914. IV és 102 lap, 8 táblával és 1 szövegekzi rajzzal 6.—



TARTALOM.

† BÁRÓ EÖTVÖS LORÁNT r. t. : Kísérleti kimutatása annak a nehézségi változásnak, amelyet valamely, a szabályos alakúnak felvett földfelületen keleti vagy nyugati irányban mozgó test e mozgás által szenved	1
RIESZ FRIGYES l. t. : Folytonos függvényoperációkról	29
MAURITZ BÉLA l. t. : Adulár a hazai andezitek érczeléreiből	37
ZIMÁNYI KÁROLY l. t. : Termésrész és kristályodott hematit Gömör vármegyéből	40
TANGL KÁROLY l. t. : Új módszer a szilárd anyag határán fellépő felületi feszültség vizsgálatára	43
MAURITZ BÉLA l. t. : A Báni-hegység bazaltszerű kőzetei	62
KONER FRIGYES : Adatok a thiaceteczetæther, az α -chloraceteczetæther és az oxalsav ismeretéhez	66